TEOREMA GENERALIZADO DE WHITNEY

MARIA HELENA NORONHA

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência de Computação da Universidade Estadual de Campinas como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

ORIENTADOR: Prof. Dr. José Carlos de Souza Kiihl.

Este Trabalho foi Realizado com o Auxílio Financeiro da Fundação de Amparo À Pesquisa do Estado de São Paulo.

Campinas, junho de 1977.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO:

Em muitas das pesquisas sendo feitas atualmente nas áreas de Topologia Algébrica e Diferencial, estudam - se propriedades e estruturas G - equivariantes ou seja propriedades e estruturas que se mantêm sob a ação de um grupo.

Wasserman em [1] mostra que muitas das proposições da Topologia Diferencial, como Teorema de Whitney, classificação de fibrados vetoriais, teoria de Cobordismo e Teoria de Morse sobre Variedades de Hilbert, podem ser estabelecidas para G - variedades, onde G é um grupo de Lie compacto.

Dos resultados acima, interessamos em estudar o resultado clássico de Topologia Diferencial que é o Teorema de Whitney, a saber: "Toda variedade de dimensão n pode ser mergulhada em $\mathbb{R}^{2n+1}$. Generalizando-o para G - variedades, provamos que toda G - variedade de dimensão n pode ser mergulhada em V^{2n+1}, onde V é um espaço vetorial real de dimensão finita que é representação de G .

Como o nosso objetivo foi produzir um texto que pudesse ser lido sem muitas dificuldades por pessoas que se iniciam no estudo de topologia, optamos pela inclusão no capítulo I de conceitos básicos e os principais resultados de representações de grupos topológicos, como o teorema de Peter - Weyl e o Lema de Schur. Nossa referência principal foi Adams [8]. Em seguida generalizamos, ainda no capítulo I, o conceito de ação diferenciável por grupo de Lie em variedades, fibrados vetoriais e espaços vetoriais reais como fêz Matsushima [15].

No capítulo II, provamos algumas proposições de imersões e mergulhos equivariantes de G - variedades em representações de grupos de Lie V, assumindo que a G - variedade M é imersa em V^t, para algum t. Nossa principal referência foi Wasserman [1].

No capítulo III, incluimos incialmente, os conceitos de órbita, tipos de órbita, tendo como referências Bredon [6] e Palais [13]. Visando provar o teorema para vizinhança tubular da órbita de um ponto feito por Koszul [9], introduzimos os conceitos de núcleos e fatias, seguindo também Palais [13].

Finalmente, introduzimos o conceito de subordinação de G - variedades a representações de G. Para as G - variedades subordinadas, atingimos nosso objetivo que é provar o teorema generalizado de Whitney. Utilizamos os trabalhos de Mostow [5] e Palais [12], que garantem que toda G - variedade está subordinada a alguma representação de V, o que não particulariza a demonstração.

Com os conceitos introduzidos no capítulo I, com a construção da G - variedade $G_W(V)$ feita no inicio do capítulo II e com os conceitos incluidos no capítulo III, os outros resultados apresentados por Wasserman em [1], podem se tornar assunto para outras teses de mestrado.

Quero externar aqui meu agradecimento ao Prof. José Carlos de Souza Kiihl pela proposição do trabalho, pela orientação e pelo incentivo. Agradeço ainda ao Prof. Eduardo Sebastiani Ferreira que me iniciou nos estudos de Grupos de Lie e ao Prof. Francesco Mercuri pela colaboração na solução de alguns problemas.

Agradeço o apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) através da concessão de bolsas de estudo, sem as quais este trabalho não teria sido realizado.

CAPÍTULO - I

G-ESPAÇOS E G-VARIEDADES

1. Ações de Grupos

Seja G um grupo topológico e X um espaço topológico de Hausdorff.

Definição 1.1.1 : Uma ação de G em X é uma aplicação $\psi: G \times X \longrightarrow X$ tal que:

i) ψ é contínua

ii) $\psi(e, x) = x, \forall x \in X$

iii) $\psi(g_1 g_2, x) = \psi(g_1, \psi(g_2, x)), \forall x \in X$ e $\forall g_1, g_2 \in G$.

O par (X, ψ) é chamado um G-espaço.

Denotaremos por $\overline{g} : X \longrightarrow X$ a aplicação dada por $\overline{g}(x) = \psi(g, x)$. Notamos que $\overline{g}$ é um homeomofismo.

Abreviaremos $\psi(g, x)$ por gx.

Fixado $x \in X$, consideremos o conjunto: $\{g \in G \mid gx = x\}$. Esse conjunto é chamado Grupo de Isotropia do ponto x, e é denotado por G_x.

O conjunto $\{x \in X \mid gx = x, \forall g \in G\}$ é denotado por X_G, e é chamado o Conjunto dos Pontos Fixos sob G.

Seja Y um outro G-espaço e $f: X \longrightarrow Y$.

Definição 1.1.2 : f é uma aplicação equivariante, se para todo

$g \in G$, $f.\overline{g} = \overline{g}.f$. A aplicação f é denominada <u>invariante</u> se $f.\overline{g} = f$, para todo $g \in G$.

Seja $\mathcal{M}(X, Y)$ o conjunto das aplicações contínuas de X em Y. G age em $\mathcal{M}(X, Y)$ do seguinte modo: $\psi : G \times \mathcal{M}(X, Y) \longrightarrow \mathcal{M}(X, Y)$ dada por $\psi(g, f) = \overline{g}.f.\overline{g}^{-1}$.

Como $\overline{g}$ e $\overline{g}^{-1}$ são contínuas, $\psi(g, f) \in \mathcal{M}(X, Y)$.

Verifiquemos que ψ é de fato uma ação:

i) ψ é contínua:

Consideremos as aplicações:

$\alpha: G \times \mathcal{M}(X, Y) \longrightarrow \mathcal{M}(Y, Y) \times \mathcal{M}(X, Y) \times \mathcal{M}(X, X)$

tal que $\alpha(g, f) = (\overline{g}, f, \overline{g}^{-1})$

$\beta : \mathcal{M}(Y, Y) \times \mathcal{M}(X, Y) \times \mathcal{M}(X, X) \longrightarrow \mathcal{M}(X, Y)$

tal que $\beta(\overline{g}, f, \overline{g}^{-1}) = \overline{g}.f.\overline{g}^{-1}$

Assim, $\psi = \beta.\alpha$ e como α e β são contínuas temos que ψ é contínua.

ii) $\psi(\overline{e}, f) = \overline{e}.f.\overline{e} = f$, $\forall f \in \mathcal{M}(X, Y)$

iii) $\psi(g_1g_2, f) = \overline{g_1g_2}.f.\overline{g_1g_2}^{-1} = \overline{g}_1.\overline{g}_2.f.\overline{g}_2^{-1}.\overline{g}_1^{-1} =$

$= \psi(g_1, \psi(g_2, f))$, $\forall f \in \mathcal{M}(X, Y)$ e $\forall g_1, g_2 \in G$.

Observamos que no G-espaço $\mathcal{M}(X, Y)$, $\mathcal{M}(X, Y)_G$ é o conjunto das aplicações equivariantes, pois:

$$gf = f \iff g.f.g^{-1} = f \iff g.f. = f.\overline{g}$$

2. <u>Ações Lineares; Representação de Grupos Topológicos</u>

Seja Λ um corpo ($\mathbb{R}$ ou C)

Sejam V um espaço vetorial sobre Λ de dimensão finita e G um grupo topológico.

Definição 1.2.1: V é uma representação de G, se existe uma ação de G em V tal que $\psi(g, v)$ seja um automorfismo de V, para g fixado. Mais precisamente:

Existe $\theta: G \longrightarrow G\ell(V)$, com θ homomorfismo contínuo, isto é, θ verificando as seguintes condições:

i) $\theta(g) = \bar{g}$ é um automorfismo de V

ii) $\bar{e}(v) = v$ e $\overline{g_1 g_2}\,(v) = \bar{g}_1(\bar{g}_2(v))$

iii) $\theta(g) = \bar{g}$ é uma função contínua em g.

O homomorfismo θ também pode ser chamado de representação de G.

V é denominado também ΛG-espaço ou G-espaço sobre Λ.

Novamente abreviaremos $\bar{g}(v) = gv$.

Tomando-se uma base em V, θ assumirá valores em $G\ell(n, \Lambda)$, onde $n = \dim V$. Podemos então falar de Matriz Representação.

Sejam V e W, dois ΛG-espaços e $f: V \longrightarrow W$.

Definição 1.2.2: f é denominada uma G-aplicação se for equivariante. f é dita uma ΛG-aplicação se for uma G-aplicação linear.

Denotaremos $\mathrm{Hom}_{\Lambda G}(V, W)$ o conjunto das ΛG-aplicações. É imediato que $\mathrm{Hom}_{\Lambda G}(V, W)$ é um espaço vetorial sobre Λ.

Definição 1.2.3 : Um ΛG-isomorfismo é uma ΛG-aplicação inversível. Dizemos que duas representações são equivalentes se forem ΛG-isomorfas.

<u>Observação</u> : Para um subespaço de um G-espaço ser também um G-espaço, basta ser invariante sob G, pois obviamente as propriedades da ação de G se mantém nos subespaços.

<u>Proposição 1.2.4</u> : Sejam V e W dois ΛG-espaços e $f : V \longrightarrow W$ uma ΛG-aplicação. Então Kerf e Imf são ΛG-espaços.

<u>Demonstração</u> :

Pela observação acima, é suficiente mostrar que Kerf e Imf são invariantes sob G.

Seja $v \in$ Kerf, então

$$f(gv) = (f.\bar{g})\ (v) = (\bar{g}.f)\ (v) = \bar{g}(f(v)) = \bar{g}(0) = 0$$

Logo $gv \in$ Kerf.

Seja $w \in$ Imf, então existe $v \in V$ tal que $f(v) = w$

$$gw = gf(v) = \bar{g}(f(v)) = (\bar{g}.f)\ (v) = (f.\bar{g})\ (v) = f(gv)$$

Logo $gw \in$ Imf.

Dados V e W dois ΛG-espaços, podemos considerar $Hom_\Lambda(V,W)$ o conjunto das Λ-aplicações lineares de V em W.

<u>Proposição 1.2.5</u>: $Hom_\Lambda(V, W)$ é um ΛG-espaço.

<u>Demonstração</u>:

$Hom_\Lambda(V,W) \subset \mathcal{M}(V,W)$ e portanto G age da seguinte maneira: $h \in Hom_\Lambda(V, W)$, $gh = \bar{g}.h.\bar{g}^{-1}$. Como $\bar{g}^{-1} \in G\ell(V)$ e $\bar{g} \in G\ell(W)$, $gh \in Hom_\Lambda(V, W)$, e como vimos na seção anterior gh é uma ação.

Então para $Hom_\Lambda(V, W)$ ser um ΛG-espaço resta provar que gh é linear em h.

De fato:

1) $g(h + k)\ (v) = (\overline{g}.(h + k).\ \overline{g}^{-1})\ (v) = \overline{g}((h + k)\ (g^{-1}v)) =$

$= \overline{g}\ (h(g^{-1}v) + k\ (g^{-1}v)) = \overline{g}(h(g^{-1}v)) + \overline{g}(k(g^{-1}v)) =$

$= (gh)\ (v) + (gk)\ (v)\ , \quad \forall\ v \in V.$

2) $g(\lambda h)\ (v) = (\overline{g}.(\lambda h).\ \overline{g}^{-1})\ (v) = \overline{g}\ (\lambda h(g^{-1}v)) =$

$= \lambda(\overline{g}(h(g^{-1}v))) = \lambda(gh)\ (v)\ , \quad \forall\ v \in V.$

Notamos novamente, que $(\mathrm{Hom}_\Lambda(V, W))_G = \mathrm{Hom}_{\Lambda G}(V, W)$.

3. Integração Invariante e Representações Ortogonais

Seja G um grupo topológico compacto.

Definição 1.3.1 : Dizemos que uma integração invariante está definida sobre G, se as seguintes condições são satisfeitas:

1) Para toda função contínua real f definida sobre G, corresponde um número real denotado por $\int_G f(x)\,dx$ e chamado integral de f sobre G.

2) Se $\alpha \in R$, então $\int_G \alpha\, f(x)\,dx = \alpha \int_G f(x)\,dx$

3) Se f e g são contínuas, então:

$$\int_G (f(x) + g(x))\,dx = \int_G f(x)\,dx + \int_G g(x)\,dx$$

4) Se para todo $x \in X$, $f(x) \geq 0$ então $\int_G f(x)\,dx \geq 0$

5) Se para todo $x \in X$, $f(x) = 1$ então $\int_G f(x)\,dx = 1$

6) Se $f(x)$ é não negativa e não é identicamente nula, então $\int_G f(x)\,dx > 0$

7) Se $a \in G$, então $\int_G f(xa)\, dx = \int_G f(x)\, dx$

8) Se $a \in G$, então $\int_G f(ax)\, dx = \int_G f(x)\, dx$

9) $\int_G f(x^{-1})\, dx = \int_G f(x)\, dx$

Teorema 1.3.2 : É possível definir unicamente uma integração invariante sobre um grupo topológico compacto G.

Demonstração :

Ver Pontrjagin [11] , pag. 92 a 98

Semelhantemente, podemos integrar funções com valores num espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e de dimensão finita, obtendo valores nesse espaço. Neste caso a integral comuta com aplicações lineares.

Proposição 1.3.3 : Sejam X um G-espaço e V um $\mathbb{R}G$-espaço. Se $f : X \longrightarrow V$ é uma aplicação contínua, então as aplicações:

$$f^*(x) = \int_G g^{-1} f(gx)\, dg \quad \text{e} \quad \overline{f}\,(x) = \int_G f(gx)\, dg$$

são, respectivamente, equivariante e invariante.

Demonstração :

Para qualquer $h \in G$, temos:

$$(f^* . h)\ (x) = f^*(hx) = \int_G g^{-1} f(ghx)\, dg =$$

$$= \int_G h\, h^{-1}\, g^{-1} f(ghx)\, dg =$$

$$= h \int_G (gh)^{-1}\, f\,(ghx)\, dg \text{ (pois a ação em } V \text{ é linear)}$$

$$= h\ \int_G g^{-1}\, f\,(gx)\, dg \text{ (pela condição 7 da definição 1.3.1)}$$

$= h\,f^*(x) = (\bar{h} \,.\, f^*)(x)$, logo f^* é equivariante.

Agora: $\bar{f}(hx) = \int_G f(ghx)\,dg =$

$= \int_G f(gx)\,dg$ (pela condição 7 da definição 1.3.1)

$= \bar{f}(x)$, logo $\bar{f}$ é invariante.

Proposição 1.3.4 : Seja $\theta : G \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(V, V)$, onde G é um grupo topológico compacto. Então a imagem de $I = \int_G \theta(g)\,dg \in \mathrm{Hom}_\Lambda(V,V)$ é o conjunto V_G.

Demonstração :

Fixo $v \in V$. A função de $\mathrm{Hom}_\Lambda(V,V) \longrightarrow V$, dada por $T \longrightarrow T(v)$, é linear sobre $\mathbb{R}$. Então comuta com a integração isto é:

$Iv = \left(\int_G \theta(g)\,dg\right)(v) = \int_G \theta(g)(v)\,dg = \int_G gv\,dg$

Seja g' um elemento qualquer de G

$g'(Iv) = g'\int_G gv\,dg = \int g'\,gv\,dg$ (a ação em V é linear)

$= \int_G gv\,dg$ (condição 8 da definição 1.3.1)

$= Iv$, logo $Iv \in V_G$

Agora, se $v \in V_G$, $gv = v$. Assim:

$Iv = \int_G (gv)\,dg = \int_G v\,dg = v$, logo $v \in \mathrm{Im}I$

Proposição 1.3.5 : Seja G um grupo topológico compacto e V uma representação sobre $\mathbb{C}$. Então podemos considerar em V uma forma Hermitiana K, positiva definida, que é invariante sob G.

Demonstração :

Seja $\mathcal{L}$ o espaço das formas Hermitianas de V. $\mathcal{L}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. $\mathcal{L}$ se tornará um $\mathbb{R}G$-espaço com a ação:

$\theta : G \longrightarrow G\ell(\mathcal{L})$ dada por

$\theta(g)\, H = gH : V\times V \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$gH\,(v,w) = H(g^{-1}v,\ g^{-1}w)$$

Mostraremos que $\mathcal{L}$ é $\mathbb{R}G$-espaço nos três seguintes passos:

1º) $gH \in \mathcal{L}$

a) $gH(v_1 + v_2,\ w) = H(g^{-1}\ (v_1 + v_2),\ g^{-1}w) =$

$= H(g^{-1}\ v_1 + g^{-1}\ v_2,\ g^{-1}w)$ (a ação em V é linear)

$= H(g^{-1}\ v_1\ ,\ g^{-1}w) + H(g^{-1}\ v_2,\ g^{-1}w) =$

$= gH\ (v_1,\ w) + gH(v_2,\ w)\ ,\ \forall\ v_1,\ v_2,\ w \in V.$

b) Analogamente $gH\ (v,\ w_1 + w_2) = gH(v,\ w_1) +$

$+ gH\ (v,\ w_2)\ ,\ \forall\ v,\ w_1,\ w_2 \in V.$

c) Para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ e v e $w \in V$,

$gH(\lambda v,\ w) = H(g^{-1}\ \lambda v,\ g^{-1}w) = H(\lambda g^{-1}v,\ w) =$

$= \lambda H(g^{-1}v,\ g^{-1}w) = \lambda gH(v,\ w).$

Analogamente $gH\ (v,\ \lambda w) = \bar{\lambda} gH(v,\ w).$

d) $gH(v,\ w) = H(g^{-1}v,\ g^{-1}w) = \overline{H(g^{-1}w,\ g^{-1}v)} =$

$= \overline{gH(w,\ v)}.$

2º) $\theta(g)$ é um automorfismo de $\mathcal{L}$

Obviamente $\theta(g)$ é linear.

$\theta(g).\ \theta(g^{-1})\ H(v,\ w) = \theta(g)\ g^{-1}\ H(v,\ w) = gg^{-1}H(v,\ w) =$

$= H\ (gg^{-1}\ v,\ gg^{-1}w) = H(v,\ w)$

Analogamente $\theta(g^{-1}).\ \theta(g) = Id$

Assim $\theta(g^{-1}) = \theta(g)^{-1}$

3º) θ é homomorfismo contínuo.

a) $\theta(e)\ H(v,\ w) = H(v,\ w)$ ou seja $\theta(e) = Id$.

b) $(g_1 g_2)\ H(v,\ w) = H(g_2^{-1}\ g_1^{-1}\ v,\ g_2^{-1}\ g_1^{-1}\ w) =$

$= g_2\ H(g_1^{-1}v,\ g_1^{-1}w) = g_1\ g_2\ H(v,\ w) =$

$= (\ \theta(g_1).\ \theta(g_2))\ H(v,\ w).$

θ é contínua em $g \in G$, pois dado $\varepsilon > 0$, existe W vizinhança de g em G tal que:

$|\ H(g^{-1}v,\ g^{-1}w) - H(g_1^{-1}v,\ g_1^{-1}w)| < \varepsilon|2,\ \forall\ g_1 \in W,\ \forall v,\ w \in V$

pois $g^{-1}v$ e $g^{-1}w$ são contínuas em g(ação de G) e H é contínua(bilinear). Assim:

$$||\ \theta\ (g)\ H - \theta(g_1)\ H\ || = \sup_{||V|| = ||W|| = 1} |g\ H(v,\ w) - g_1\ H(v,\ w)| \leq \varepsilon/2$$

Portanto:

$$||\theta(g) - \theta(g_1)|| = \sup_{||H||=1} ||\theta(g)\ H - \theta(g_1)\ H|| \leq \varepsilon|2 < \varepsilon$$

o que conclui a demonstração.

Como temos agora $\mathcal{L}$ um $\mathbb{R}$G-espaço e $\theta : G \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{L},\mathcal{L})$, pela proposição anterior podemos integrar gH sobre G e obter uma forma hermitiana invariante dada por:

$$K(v, w) = \int_G H(g^{-1}v, g^{-1}w)\, dg$$

Se tomarmos H uma forma hermitiana positiva definida, K será positiva definida também pelas condições (4) e (6) da definição 1.3.1.

A proposição acima permite munirmos V de uma forma hermitiana positiva definida invariante ou seja, um produto interno invariante e consequentemente uma norma invariante. Assim teremos:

$$< gv, gw > = < v, w > \forall v, w \in V \text{ e } \forall g \in G.$$

Então para qualquer $g \in G$, $\theta(g) = \overline{g}$ é uma transformação linear unitária.

<u>Definição 1.3.6</u> : Uma representação V é dita <u>unitária</u> quando existir sobre V um produto interno invariante sob G. No caso de V ser um $\mathbb{R}$G-espaço, falamos então de <u>Representação Ortogonal</u>.

Pelo que já foi visto conclui-se então que se V é uma representação de um grupo topológico compacto, então V é unitária ou então ortogonal quando V é $\mathbb{R}$G-espaço.

4. Representações Irredutíveis

<u>Proposição 1.4.1.</u> : Se G é um grupo compacto então todo AG-espaço

V é um projetivo isto é: se tivermos o diagrama

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "\beta"'] \\ V \arrow[r, "\alpha"] & Y \end{tikzcd}$$

com β sobre, então existe uma ΛG-aplicação $\gamma: V \longrightarrow X$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "\beta"] \\ V \arrow[ur, "\gamma"] \arrow[r, "\alpha"] & Y \end{tikzcd}$$

comuta:

<u>Demonstração</u>:

Consideremos $\mathrm{Hom}_\Lambda\ (V, X)$ o ΛG-espaço como na proposição 1.2.5.

Se σ é uma Λ-aplicação linear, integrando-se $g\sigma$ em G, obtemos uma aplicação linear γ que é invariante sob G (proposição 1.3.4).

Como β é sobre, podemos escolher a Λ-aplicação linear σ tal que $\beta\sigma = \alpha$. Então temos:

$$\gamma = \int_G g\sigma g^{-1}$$

$$\beta.\gamma = \beta \int_G g\sigma g^{-1} = \int_G \beta\, g\sigma g^{-1} = \int_G g\beta\sigma g^{-1} \quad (\beta \text{ é } \Lambda G\text{-aplicação})$$

$$= \int_G g\ \alpha\ g^{-1} = \int_G \alpha \qquad (\alpha\ \Lambda G\text{-aplicação})$$

$$= \alpha$$

<u>Definição 1.4.2</u> : Uma representação V de G não nula é <u>redutível</u> se algum subespaço próprio de V é um ΛG-espaço. Do contrário V é

irredutível.

Teorema 1.4.3 (Peter-Weyl) : Se G é um grupo compacto então toda representação de G é soma-direta de representações irredutíveis.

Demonstração:

Seja V uma representação de V. Demonstraremos o teorema por indução em $n = \dim_\Lambda V$

i) Se $n = 1$ é claro o teorema

ii) Assumiremos que o resultado é válido para representações W tais que $\dim W < \dim V$.

Suponhamos que S seja subespaço próprio de V e que S, seja também uma representação de G.

V/S é também uma representação através da ação $g(x + S) = gx + S$ onde gx é a ação de G em V.

A aplicação $\bar{p} : V \longrightarrow V/S$ tal que $p(x) = x + S$ é uma ΛG-aplicação pois:

$$(\bar{g}.p)\ (x) = \bar{g}(p(x)) = gp(x) = g(x + S) = gx + S$$

$$(p.\bar{g})\ (x) = p(\bar{g}(x)) = p\ (gx) = gx + S$$

Então temos a sequência exata:

$$0 \longrightarrow S \xrightarrow{i} V \xrightarrow{p} V/S \longrightarrow 0$$

com i e p, ΛG-aplicações e p aplicação sobre.

Assim, pela proposição 1.4.1, teremos o ΛG-isomorfismo tal que $V \cong S \oplus V/S$

Pela hipótese de indução o teorema está demonstrado

Lema 1.4.4 (Schur) : Seja G um grupo topológico qualquer. Se

$f : V \longrightarrow W$ é uma ΛG-aplicação e V e W são irredutíveis, então f é zero ou um isomorfismo.

Demonstração :

Pela proposição 1.2.4 , Kerf e Imf são ΛG-espaços. Logo se V e W são irredutíveis, temos:

$$\text{Kerf} = V \quad \text{ou} \quad \text{Kerf} = \{ 0 \}$$

$$\text{Imf} = \{ 0 \} \quad \text{ou} \quad \text{Imf} = W$$

Isto demonstra o Lema.

Corolário 1.4.5 : Se W é uma representação irredutível de G, então $\dim_{\Lambda G} (W, W) \geq 1$

Demonstração :

Pelo lema de Schur notamos que $\text{Hom}_{\Lambda G}(W, W)$ tem no mínimo um isomorfismo. Logo segue o corolário.

Proposição 1.4.6 : Se V é uma representação de G irredutível e W é equivalente a V, então W também é irredutível.

Demonstração :

Seja $f : W \longrightarrow V$ o ΛG-isomorfismo. Suponhamos U subespaço próprio de W, sendo U uma representação de G também .

Como f é isomorfismo, $f(U)$ é subespaço próprio de V. Como f é equivariante, $f(U)$ é invariante sob G, conforme demonstramos na proposição 1.2.4.

Assim $f(U)$ é ΛG-espaço contido propriamente em V, o que contradiz o fato de V ser irredutível.

Logo W é irredutível

5. Ações Diferenciáveis

Seja M uma variedade C^{∞} com ou sem bordo e G um grupo de Lie.

Definição 1.5.1 : M é uma G-Variedade se existe uma ação de G em em M, tal que esta ação $\phi : G \times M \longrightarrow M$ seja uma aplicação diferenciável (C^{∞}).

Assim a aplicação induzida $\tilde{g}: M \longrightarrow M$ é um difeomorfismo de M. para todo $g \in G$.

Definição 1.5.2 : A terna (G, M, ϕ), G, M e ϕ como acima, é chamada de um Grupo de Transformações Diferenciáveis.

Definição 1.5.3 : Um espaço vetorial V é uma representação de um Grupo de Lie se o homomorfismo $\theta: G \longrightarrow G\ell(V)$ é diferenciável (C^{∞}).

Teorema 1.5.4 : Sejam G e G' dois grupos de Lie e θ um homomorfismo contínuo de G em G'. Então θ é diferenciável.

Demonstração :

Ver Matsushima[15], pag. 36 e 37

Proposição 1.5.5 : Toda representação do grupo topológico subjacente a um grupo de Lie é uma representação deste grupo de Lie.

Demonstração :

Sendo $G\ell(V)$ um grupo de Lie, o resultado segue do teorema anterior.

Uma classe particular de (G, M, ϕ) consiste das representações ortogonais de G, isto é, (G, V, θ) onde V é um espaço vetorial real e cada $\theta(g)$ é uma transformação ortogonal.

Definição 1.5.6 : Se (G, M, ϕ) e (G, N, ψ) são dois grupos de transformações diferenciáveis, então um mergulho de (G, M, ϕ) em (G, N, ψ) é um mergulho f de M em N tal que $f.\overline{g} = \overline{g}.f$ para todo $g \in G$, isto é, um mergulho equivariante.

Proposição 1.5.7 : Se M é uma G-variedade, então $T(M)$ é também uma G-variedade.

Demonstração :

Como $\phi : G \times M \longrightarrow M$ é diferenciável (C^∞), então $d\phi : T(G) \times T(M) \longrightarrow T(M)$ é diferenciável (C^∞). ϕ induz as aplicações:

$$\overline{g} : M \longrightarrow M \text{ tal que } \overline{g}(p) = \phi(g, p)$$

e

$$\overline{p} : G \longrightarrow M \text{ tal que } \overline{p}(g) = \phi(g, p) .$$

Como estamos procurando uma função de $G \times T(M)$ em $T(M)$ diferenciável, basta considerarmos a derivada parcial de ϕ em relação a $p \in M$ que é $d\overline{g}_p$ Portanto seja:

$$\theta : G \times T(M) \longrightarrow T(M) \text{ tal que}$$

$$\theta(g, X) = d\overline{g}_p (X) \quad \text{para} \quad X \in T_pM .$$

θ satisfaz as propriedades desejadas:

i) θ é diferenciável (C^∞) pois é derivada parcial de ϕ que é diferenciável.

ii) $\theta(e, X) = d\,\overline{e}_p\,(X) = X$ pois $\overline{e}$ é a identidade

iii) $\theta(g_1g_2, X) = d(\overline{g}_1\,\overline{g}_2)_p\,(X) = (d\,\overline{g}_1)_{\overline{g}_2(p)}\cdot(d\overline{g}_2)_p\,(X) =$

$= \theta(g_1, \theta(g_2, X))$.

Proposição 1.5.8 : Se $f : M \longrightarrow N$ é uma aplicação diferenciável equivariante, com M e N G-variedades, então $df : T(M) \longrightarrow T(N)$ também é equivariante.

Demonstração :

Para todo $g \in G$, temos:

$\overline{g}.\,f = f.\,\overline{g}$ o que implica $d(\overline{g}.\,f) = d(f.\,\overline{g})$

Logo:

$d\overline{g}.\,df = df.\,d\overline{g}$, para todo $g \in G$.

Definição 1.5.9 : Se $\pi: E \longrightarrow B$ é um fibrado vetorial com E e B G-espaços e cada $\overline{g} : E \longrightarrow E$ é uma aplicação de fibrados, isto é, $g\,(x) \in \pi^{-1}(\{gb\})$ para $x \in \pi^{-1}(\{b\})$, então $\pi : E \longrightarrow B$ será chamado uma G-fibrado vetorial. Se π é diferenciável e E e B são G-variedades então π é um G-fibrado diferenciável.

Proposição 1.5.10 : $T(M)$ é um G-fibrado diferenciável quando M é uma G-variedade.

Demonstração :

Para $X \in T_pM$, $\theta(g, X) = d\overline{g}_p\,(X)$.

Como $d\overline{g}_p$ é definida de $T_p\,M$ em $T_{gp}\,M$ segue-se o resultado.

Definição 1.5.11 : Se $\pi: E \longrightarrow B$ é um G-fibrado vetorial e tem uma métrica riemanniana $\langle\,,\,\rangle$ e $\overline{g} : E \longrightarrow E$ é uma isometria para todo $g \in G$, então π é um <u>G-fibrado</u> <u>vetorial</u> <u>riemanniano</u>.

Se E é um G-fibrado vetorial riemanniano, denotaremos:

$\| e \| = < e,e >^{1/2}$ $\qquad E(r) = \{e \in E \mid \| e \| \leq r\}$

$\overset{o}{E}(r) = \{ e \in E \mid \| e \| < r\}$ $\qquad \dot{E}(r) = \{ e \in E \mid \| e \| = r\}$

$$\dot{E} = \dot{E}\ (1) \quad \text{e} \quad \overset{o}{E} = \overset{o}{E}\ (1)$$

<u>Proposição 1.5.12</u> : Uma fibra de um G-fibrado vetorial riemanniano, sobre um ponto fixo é uma representação ortogonal de G.

<u>Demonstração</u> :

Seja $\pi: E \longrightarrow B$ o G-fibrado riemanniano. $\overline{g} : E \longrightarrow E$ é tal que $\overline{g}\ (x) \in \pi^{-1}(gb)$ para $x \in \pi^{-1}(b)$ ou seja a fibra $\pi^{-1}(b)$ é invariante sob G. Sendo assim definimos:

$$\theta: G \longrightarrow G\ell(\pi^{-1}(b)) \text{ tal que } \theta(g) = \overline{g}$$

É fácil verificar que θ satisfaz as propriedades de representação de G pois E é um G-espaço. $\pi^{-1}(b)$ é ortogonal pois $\overline{g}$ é isometria e então:

$$< gx,\ gy > = < \overline{g}(x),\ \overline{g}(y) > = < x,\ y >.$$

CAPÍTULO II

IMERSÕES E MERGULHOS EM G-ESPAÇOS EUCLIDIANOS

1. A G-Variedade $G_W(V)$

Consideraremos, de agora em diante, G um grupo de Lie compacto, e V uma representação ortogonal do grupo de Lie G.

Seja $G_k(V)$ a variedade Grassmaniana de k-planos em V. Podemos identificar cada k-plano com uma projeção ortogonal sobre V, da qual o k-plano é o núcleo. Assim, os elementos de $G_k(V)$ serão projeções ortogonais de V, com nulidade k.

Como $G_k(V)$ está contido em $\mathcal{M}(V, V)$, G age em $G_k(V)$ por $gP = \bar{g}. P. \bar{g}^{-1}$, onde $\bar{g}$ é então um automorfismo de V.

<u>Proposição 2.1.1</u> : $G_k(V)$ com esta ação é uma G-Variedade.

<u>Demonstração</u>:

Precisamos, primeiramente, mostrar que $gP \in G_k(V)$. De fato:

Consideremos $N = \text{Ker } gP = \{ v \in V \mid (\bar{g}. P. \bar{g}^{-1}) (v) = 0 \}$

Se $g (P(\bar{g}^{-1}(v))) = 0$ temos que $P(\bar{g}^{-1}(v)) = 0$, pois $\bar{g}$ é um automorfismo. Logo $P(\bar{g}^{-1}(v)) = P(g^{-1}v) = 0$, isto é, $g^{-1}v \in \text{Ker } P$. Assim $\bar{g}^{-1}(N) \subset \text{Ker } P$. Mas também $\bar{g}(\text{Ker } P) \subset N$, pois se $v \in \text{Ker } P$,

$(\bar{g}. P. \bar{g}^{-1}) (gv) = \bar{g}(P(\bar{g}^{-1}(gv))) = \bar{g}(P (g^{-1} gv)) = \bar{g}(P(v)) = 0$. Logo $g^{-1}(N) = \text{Ker } P$

Como $\dim \bar{g}^{-1}(N) = \dim N$, pois $\bar{g}^{-1}$ é automorfismo, temos

$\dim N = \dim \operatorname{Ker} P = k$.

Agora, como já sabemos que gP é uma ação de G, resta mostrarmos que a ação é diferenciável. Temos:

$$\psi : G \times G_k(V) \longrightarrow G_k(V) \quad \text{dada por :}$$

$$\psi(g, P) = \bar{g}.\ P.\ \bar{g}^{-1}$$

Consideremos :

$$\alpha: G \times G_k(V) \longrightarrow G\ell(V) \times G_k(V) \times G\ell(V)$$

dada por : $\alpha(g, P) = (\bar{g}, P, \bar{g}^{-1})$

$$\beta: G\ell(V) \times G_k(V) \times G\ell(V) \longrightarrow G_k(V)$$

dada por : $\beta(\bar{g}, P, \bar{g}^{-1}) = \bar{g}.\ P.\ \bar{g}^{-1}$

Observamos que α é diferenciável, pois $\alpha = \theta \times 1 \times \theta^{-1}$ onde θ é a representação de G e 1 aplicação identidade. Também β é diferenciável. Portanto, $\psi = \beta.\alpha$ é diferenciável.

Consideremos agora o fibrado universal sobre $G_k(V)$ denotado por $\mu_k(V)$;

$$\mu_k(V) = \{(P, v) \mid P \in G_k(V) \text{ e } v \in \operatorname{Ker} P\}$$

Seja $\pi: \mu_k(V) \longrightarrow G_k(V)$, dada por $\pi(P, v) = P$. Temos então que uma fibra em P é o espaço nulo de P, isto é, $\pi^{-1}(\{P\}) = \operatorname{Ker} P$.

<u>Proposição 2.1.2</u> : O fibrado $\mu_k(V) \xrightarrow{\pi} G_k(V)$ é um G-fibrado vetorial riemanniano.

<u>Demonstração</u> :

A nossa demonstração será dividida nos três passos seguintes:

1º passo : $\mu(V)$ é uma G-Variedade com a ação

$$\phi : G \times \mu_k(V) \longrightarrow \mu_k(V)$$
$$(g, (P,v)) \longrightarrow (\bar{g} \cdot P \cdot \bar{g}^{-1}, gv)$$

Primeiramente, $\phi(g, (P,v)) \in \mu_k(V)$, pois $(\bar{g}. P.\bar{g}^{-1})(gv) =$

$= \bar{g}(P(g^{-1}(gv))) = \bar{g}(P(g^{-1} gv)) = \bar{g}(P(v)) = 0$. Isto quer dizer que $gv \in \operatorname{Ker}(\bar{g}. P. \bar{g}^{-1})$

Temos também que ϕ é diferenciável pois cada função coordenada o é.

$\phi(e, (P, v)) = (\bar{e}. P. \bar{e}, ev) = (P, v)$.

$\phi(g_1 g_2, (P, v)) = (\bar{g}_1 \bar{g}_2 . P. \bar{g}_2^{-1} \bar{g}_1^{-1}, g_1 g_2 v) = \phi(g_1, \phi(g_2, (P,v)))$.

2º passo : Para g fixado, $\phi_g : \mu_k(V) \longrightarrow \mu_k(V)$ é uma aplicação de fibrados:

$\phi_g((P, v)) = (\bar{g}. P. \bar{g}^{-1}, gv)$

Logo $\phi_g(\operatorname{Ker} P) = \operatorname{Ker}(\bar{g}. P. \bar{g}^{-1})$

3º passo : O produto interno de V induz uma métrica sobre $\mu_k(V)$ que o torna um G-fibrado riemanniano.

Como Ker P está contido em V, definimos:

$<, >_p : \operatorname{Ker} P \times \operatorname{Ker} P \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$<v, u>_p = <v, u>$, sendo v e u elementos de V. Para quaisquer $s_1, s_2 : G_k(V) \longrightarrow \mu_k(V)$, secções diferenciáveis, temos que $f(P) = < s_1(P), s_2(P) >_p$ é diferenciável (estamos considerando o produto interno de V), para s_1, s_2, fixadas.

Com esta métrica riemanniana $\phi_g : \mu_k(V) \longrightarrow \mu_k(V)$ é uma isometria, pois Ker $P \subset V$ e V é uma representação ortogonal isto é : $<gv, gu>_P = <v, u>_P$.

Os três passos acima provam o resultado desejado.

Considerando o conjunto dos pontos fixos $G_k(V)_G$, notamos que seus elementos são projeções equivariantes pois, se $P \in G_k(V)_G$, temos que $\bar{g}. P. \bar{g}^{-1} = P$ para qualquer $g \in G$ ou seja $\bar{g}. P = P.\bar{g}$

Para $P \in G_k(V)_G$, seja $v \in$ Ker P. Então $P(v) = 0 =$
$= (\bar{g}. P. \bar{g}^{-1})(v) = \bar{g}(P(g^{-1} v))$, $\forall g \in G$. Logo $g^{-1}v \in$ KerP, $\forall g \in G$.

Isto quer dizer que Ker P é invariante sob G para $P \in G_k(V)_G$. Sendo assim, Ker P é também uma representação de G.

Observação: Se P e Q estão na mesma componente conexa de $G_k(V)_G$, pode-se verificar que Ker P e Ker Q são representações equivalentes de G.

Seja $W \subset V$, um subespaço k-dimensional invariante sob G. Denotaremos por $G_W(V)$, o conjunto dos k-planos de $G_k(V)_G$ que são equivalentes a W. Pela observação acima $G_W(V)$ é uma componente conexa de $G_k(V)_G$. $G_k(V)$ é uma variedade e portanto um espaço topológico localmente conexo. Assim $G_W(V)$ é um aberto em $G_k(V)$ e portanto é também uma variedade.

Se $P \in G_W(V)$, $P = gP \in G_W(V)$, para todo $g \in G$, logo $G_W(V)$ é uma G-variedade.

Denotaremos $\mu_W(V)$ por $\mu_k(V)|_{G_W(V)}$

2. Imersões equivariantes em G-espaços euclidianos.

Proposição 2.2.1 : Se M^n pode ser imersa em V^t então M também pode ser imersa em V^{2n}.

Demonstração :

Seja $f : M \longrightarrow V^t$ a imersão. Então df também é uma imersão, e f sendo equivariante, df é também uma imersão equivariante (proposição 1.5.8)

Pelo teorema de Peter-Weyl, V é soma direta de representações irredutíveis. Assim, seja W representação irredutível de G e contida em V.

Suponhamos dim W = k e seja s o número de vezes que W ocorre em V^t. Obviamente $s \geq t$. Portanto se $s \leq 2n$, o que implica $t \leq 2n$, então M é imersa em V^{2n}.

Suponhamos agora $s > 2n$. Consideremos o seguinte diagrama:

$$\dot{T}(M) \xrightarrow{\widetilde{df}} \dot{V}^t \xleftarrow{\ i\ } \dot{\mu}_w(V^t) \xrightarrow{\ \pi\ } G_w(V^t)$$

onde as aplicações acima são definidas por:

$$\widetilde{df}(X) = \frac{df(X)}{||df(X)||}$$

$$i(P,w) = w$$

$$\pi(P,w) = P$$

O par (P, w) representa um ponto em $\dot{\mu}_k(V^t)$, onde P é uma projeção com espaço nulo isomorfo a W, e w um vetor unitário pertencente ao espaço nulo de P.

As aplicações, acima definidas, são equivariantes, pois:

$$(\bar{g}.\widetilde{df})(X) = g\,\widetilde{df}(X) = \frac{g\,df(X)}{||df(X)||}$$

$$(\widetilde{df}.\,\bar{g})\ (X) = \widetilde{df}(gX) = \frac{df(gX)}{||df(gX||} = \frac{gdf(X)}{||gdf(X)||}$$ pois df é equivariante

$$= \frac{gdf(X)}{||df(X)||}$$ pois V^t é representação ortogonal de G.

Agora, $(\bar{g}.i)\ (P, w) = gi\ (P, w) = gw$

$(i.\bar{g})\ (P, w) = i(g(P, w)) = i(gP, gw) = gw$

Também, $(\bar{g}.\pi)\ (P, w) = g\pi(P,w) = gP$

$(\pi.\bar{g})\ (P, w) = \pi(gP, gw) = gP$

Afirmamos que i é um mergulho.

De fato: i é injetora

Se $i(P, w) = i(P_1, w_1)$ temos $w = w_1$. Logo $P(w)$ e $P_1(w)$ são iguais a zero, isto é, $w \in \operatorname{Ker} P \cap \operatorname{Ker} P_1 = U$.
$U \neq \{0\}$ pois $w \in U$ e $||w|| = 1$. Se $u \in U$, $gu \in \operatorname{Ker} P$, pois KerP é representação de G. Analogamente $gu \in \operatorname{Ker}P_1$. Assim U é um G-espaço contido em KerP e $\operatorname{Ker}P_1$. Como W é irredutível e KerP e $\operatorname{Ker}P_1$ são equivalentes a W, então KerP e $\operatorname{Ker}P_1$ são irredutíveis (pela proposição 1.4.6). Assim $\operatorname{Ker}P = \operatorname{Ker}P_1$ e pela identificação que fizemos na secção 1, temos $P = P_1$.

Agora, seja $X_{(P,\ w)}$ um vetor tangente a (P, w). Sejam $\lambda(t) \in V^t$ e $\gamma(t) \in G_w(V^t)$, curvas tais que $(\gamma'(0), \lambda'(0)) = X_{(P,w)}$. Temos que $di_{(P,w)} = \lambda'(0)$. Observemos que:

$$\gamma(t) = (\pi.\ i^{-1}.\ \lambda)\ (t)$$

$$\gamma'(0) = d(\pi.\ i^{-1})_{\lambda(0)}\lambda'(0)$$

Portanto se $\lambda'(0) = 0$ temos $\gamma'(0) = 0$, o que quer dizer: $di_{(P,\ w)}X = 0$, logo $X_{(P,\ w)} = (\gamma'(0), \lambda'(0) = 0$, isto é, i é uma imersão.

Então temos : (a) i é imersão

(b) i é diferenciável e aberta (i é projeção)

(c) i é injetora

Dos fatos (a) e (b) concluimos que $i(\dot{\mu}_W(V^t))$ é subvariedade de $\dot{V}^t$ e dim $i(\dot{\mu}_W(V^t))$ é igual a dim $\dot{\mu}_W(V^t)$ (Demonstrado em Elon L. Lima [3], pag. 195).

Assim i é um difeomorfismo local (pelo teorema da Função Inversa) e mais i é um difeomorfismo de $\dot{\mu}_W(V^t)$ em $i(\dot{\mu}_W(V^t))$ devido i ser injetora. Portanto nossa afirmativa é verdadeira.

Temos que dim $\dot{T}(M) = 2n-1$. Logo :

dim $\widetilde{df}(T(M)) \cap i(\dot{\mu}_W(V^t)) \leq 2n-1$.

Como i é um mergulho e π é diferenciável teremos:

$$\dim (\pi.\ i^{-1})\ ((\widetilde{df}(\dot{T}\ (M)) \cap i(\dot{\mu}_W(V^t))) \leq 2n-1.$$

Mas dim $G_W(V^t) = (s-1)\ell$ onde $\ell \geq 1$ é a dimensão de $Hom(W,W)_G$. Como estamos supondo $s > 2n$, temos $(s-1)\ell > 2n-1$, o que quer dizer que existe $P \in G_W(V^t)$ tal que:

$$P \notin (\pi.\ i^{-1})\ ((\widetilde{df}(\dot{T}\ (M)) \cap i\ (\dot{\mu}_W(V^t))).$$

Escolhemos P nessas condições e então, se $(P.\widetilde{df})(w) = 0$ com $w \neq 0$, temos $df(w) \neq 0$, pois df é injetora. Como $||\widetilde{df}(w)||=1$ e $\widetilde{df}(w) \in \operatorname{Ker} P$, $(P, \widetilde{df}(w)) \in \dot{\mu}_W(V^t)$ e, consequentemente:

$$P \in (\pi.\, i^{-1})\,((\widetilde{df}(\dot{T}'(M)) \cap i(\dot{\mu}_W(V^t))).$$

Isto contradiz a suposição feita sobre P.

Assim $(P.\widetilde{df})(w) = 0$ se, e somente se, $w = 0$ e isto implica que $P.f$ é uma imersão.

$P.f$ é equivariante, pois P e f são equivariantes.

Sabemos que se $P \in G_W(V^t)$, a nulidade de P é k. Isto quer dizer que se formos compondo projeções de $G_W(V^t)$ o posto desta composta irá decrescendo conforme o número das composições feitas pois nenhuma delas é sobrejetora. Assim poderemos encontrar uma projeção T, $T = \ldots P_4.\, P_3.\, P_2.\, P_1$ com cada P_i nesta composição tal que $P_i \notin (\pi.\, i^{-1})\,(\widetilde{df}\,(\dot{T}(M) \cap i\,(\dot{\mu}_W(V^t)))$ e tal que a imagem de $T.f$ seja isomorfa a V^{2n}. Então $T.f$ é uma imersão de M em V^{2n}.

<u>Observação</u> : Se $P_0 \in G_W(V^t)$, então a P da demonstração pode ser escolhida de modo a estar arbitrariamente próxima de P_0.

<u>Proposição 2.2.2</u> : Se M^n admite uma imersão injetora em V^t, então existe uma imersão injetora de M em V^{2n+1}.

<u>Demonstração</u> :

Consideremos o diagrama:

$$M \times M - \Delta \xrightarrow{\alpha} \dot{V}^t \xleftarrow{i} \dot{\mu}_W(V^t) \xrightarrow{\pi} G_W(V^t)$$

onde i e π são como na proposição 2.2.1, Δ a diagonal de $M \times M$ e

$\alpha\ (X, Y) = \dfrac{f(x) - f(y)}{||f(x) - f(y)||}$, onde $f : M \longrightarrow V^t$ é a imersão injetora.

Observe que α é equivariante, pois f o é e V^t é representação ortogonal de G.

Como $\dim(M \times M) = 2n$, pelos mesmos argumentos da proposição 2.2.1, teremos:

$$\dim\ (\pi.\ i^{-1})\ (\alpha(M \times M - \Delta) \cap i(\ \dot{\mu}_W\ (V^t))) \leq 2n$$

Assim se $t > 2n + 1$ (pois para $t \leq 2n + 1$ a conclusão da proposição é imediata), $s > 2n + 1$ e acarreta que $(s - 1)\ell > 2n$. Logo existe $P \in G_W\ (V^t)$ tal que:

$$P \notin\ (\pi.\ i^{-1})\ (\alpha(M \times M - \Delta) \cap i(\ \dot{\mu}_W\ (V^t))). \qquad (1)$$

Mas pela proposição 2.2.1 existe $P \in G_W(V^t)$ tal que:

$$P \notin (\pi.\ i^{-1})\ ((\ df(\ \dot{T}(M)) \cap i(\ \dot{\mu}_W\ (V^t))). \qquad (2)$$

Tomemos P satisfazendo (1) e (2). Já sabemos que $P.f$ é uma imersão equivariante. Resta provarmos que é injetora.

Se $P(f(x)) = P(f(y))$, então $(P.\alpha)\ (x, y) = 0$.
Assim $\alpha(x, y) \in \operatorname{Ker} P$, logo $\alpha(x, y) \in i(\pi^{-1}(P))$, o que contradiz a condição (1) sobre P.

Como na proposição 2.2.1, encontramos T cuja imagem é isomorfa a V^{2n+1} e $T\ .f$ é uma imersão injetora.

<u>Observação</u> : Nas proposições acima, se a origem não pertence a imagem de f, então a nova imersão pode ser escolhida de maneira que a

origem também não pertença a sua imagem . Para isso basta considerarmos :

$$\beta: M \longrightarrow V^t, \text{ tal que } \beta(x) = \frac{f(x)}{||f(x)||}$$

Então β é uma imersão equivariante, além disso $\dim M = n$.

Novamente, pelos mesmos argumentos da proposição 2.2.1, teremos:

$$\dim (\pi .\ i^{-1}) \ (\beta(M) \cap i(\dot{\mu}_W(V^t))) \leq n.$$

Como $\dim (G_W(V^t) = (s-1)\ell > 2n > n$, existe P tal que $i(\pi^{-1}(P))$ é disjunto de $\beta(M)$. Portanto se $P(f(x)) = 0$ então $\frac{1}{||f(x)||} P(f(x))=0$.

Como P é linear, $P(\frac{f(x)}{||f(x)||}) = 0$, ou seja $P(\beta(x)) = 0$. Assim $\beta(x) \in \operatorname{Ker} P$, logo $\beta(x) \in i(\pi^{-1}(P))$, o que é contradição. Logo $(P.f)\ (x) \neq 0$ para todo $x \in M$.

3. Aproximação Uniforme por funções diferenciáveis.

Seja $C_G(M, N)$ o conjunto das aplicações C^∞ equivariantes entre as G-Variedades M e N. Muniremos $C_G(M, N)$ da topologia C^k, para algum k fixado.

As vizinhanças básicas de uma aplicação $f \in C_G(M, N)$ são os conjuntos $V^k(f, C, \varepsilon)$, onde C é um subconjunto compacto de M, ε um número real positivo e

$$V^k(f,C,\varepsilon) = \{h \in C_G(M, N) \ / \ N_k(f-h)(p) < \varepsilon, \ \forall p \in C\}$$

com

$$N_k(f-h)(p) = \sum_{j=0}^{k} ||d^j(\phi^{-1}.f.\psi)_{(\psi^{-1}(p))} - d^j(\theta.h.\psi)_{(\psi^{-1}(p))}||,$$

onde $|| \ ||$ denota a norma usual das aplicações multilineares e ψ, ϕ,θ são os homeomorfismos das cartas locais de p, f(p) e h(p), respectivamente. Esses homeomorfismos vão de vizinhanças do R^n para vizinhanças das variedades. Assim quando dissermos que h é uma C^k- aproximação de f isto significa que existe C e ε como acima tal que para todo $p \in C$, $N_k(f - h)(p) < \varepsilon$.

<u>Proposição 2.3.1</u> : Se M admite uma imersão $f : M \longrightarrow V^t$, então qualquer aplicação $g : M \longrightarrow V^{2n}$ pode ser C^k- aproximada por uma imersão. A aproximação é uniforme.

<u>Demonstração</u> :

Sejam i_1 e i_2 as inclusões de V^t e V^{2n} respectivamente em $V^t \times V^{2n}$. Seja P_o a projeção interna de $V^t \times V^{2n}$ no segundo fator, isto é:

$$P_o : V^t \times V^{2n} \longrightarrow V^t \times V^{2n} \text{ dada por } (x,y) \longrightarrow (o,y).$$

Consideremos a função $fxg : M \longrightarrow V^t \times V^{2n}$, então $d(fxg)_{(x_o)}(v) = (df_{(x_o)}(v), dg_{(x_o)}(v))$. Como $df_{(x_o)}$ é injetora para todo $x_o \in M$ (f é imersão), teremos que $d(fxg)_{(x_o)}$ é injetora para todo x_o e assim fxg é uma imersão.

Assim, pela proposição 2.2.1, existe

$$P : V^t \times V^{2n} \longrightarrow V^t \times V^{2n}$$

tal que $P.(fxg)$ é imersão e para $\varepsilon > o$ podemos tomar P tal que $\|P - P_o\| < \varepsilon$. Assim teremos:

$$||P.i_2 - P_o - i_2|| = \sup_{||y||=1} ||P(i_2(y)) - P_o(i_2(y))|| = \sup_{||(o,y)||=1} ||P(o,y) - P_o(o,y)|| < \varepsilon$$

$$||P\cdot i_1 - P_o\, i_1|| = \sup_{\|x\|=1} \|P(i_1(x)) - P_o(i_1(x))\| = \sup_{\|(x,o)\|=1} \|P(x,o) - P_o(x,o)\| < \varepsilon$$

Seja $E = P(V^t \times V^{2n})$, $P_o(V^t \times V^{2n}) = \{o\} \times V^{2n}$.

Como $||P - P_o|| < \varepsilon$ e E é subespaço, se $(x,y) \in E$ então $x = 0$ pois do contrário vai existir $n \in N$ tal que $(x,y) + \dots + (x,y) = (nx, ny) \in E$ e $||nx|| > \varepsilon$. Assim, se $P(u, v) = (nx, ny)$ e $P_o(u,v) = (o,y')$, teremos $|(nx, ny) - (o,y')| = |nx| + |ny - y'| > \varepsilon$, o que condiz $||P - Po|| < \varepsilon$. Logo P está assim definida,
$P : V^t \times V^{2n} \longrightarrow \{o\} \times V^{2n}$.

Mas $P_o \cdot i_2 : V^{2n} \longrightarrow \{0\} \times V^{2n}$, $y \xrightarrow{i_2} (o,y) \xrightarrow{Po} (o,y)$ é um isomorfismo. Logo $P.i_2 : V^{2n} \longrightarrow \{0\} \times V^{2n}$ é também um isomorfismo para ε suficientemente pequeno pois o conjunto dos isomorfismos é aberto e $||P.i_2 - P_o.i_2|| < \varepsilon$. Então $(P.\ i_2)^{-1} : E \longrightarrow V^{2n}$ está definida.

Agora, seja $\bar{g} = (P.\ i_2)^{-1}.P.(f \times g)$. Observamos que $\bar{g}$ é diferenciável e que $\bar{g}$ é uma imersão equivariante, pois é composta pelas imersões equivariantes $(P.i_2)^{-1}$ e $P.(f\times g)$. Então:

$$\bar{g}\ (x) = (P.i_2)^{-1}.P.\ (f\times g)\ (x) =$$

$$= g(x) + (P.i_2)^{-1}.P.\ (f(x),\ 0) =$$

$$= g(x) + (P.i_2)^{-1}.P.\ i_1(f(x)).$$

Chamamos $A = (P.i_2)^{-1}.P.i_1$. Portanto a aproximação será da forma $\bar{g}\ (x) = g(x) + A(f(x))$, onde A é uma aplicação linear limitada de V^t em V^{2n}.

Seja $A' = (P.i_2)^{-1}.P_o.\ i_1$, então

$$||A-A'|| = ||(P.\ i_2)^{-1}\ P.i_1 - (P.i_2)^{-1}P_o.i_1|| = ||(P.i_2)^{-1}.(P.i_1 - P_o.i_2)|| \leq$$

$\leq \|(P.i_2)^{-1}\| \, \| P.i_1 - P_0\, i_2\| < \|(P.i_2)^{-1}\| . \varepsilon$.

Mas $A'(x) = (P.i_2)^{-1}.(P_0(x,0) = (P.i_2)^{-1}((0,0)) = 0$, ou seja $A'=0$. Logo $\|A\| < \varepsilon' = \|(P.i_2)^{-1}\| \, \varepsilon$.

Usando se necessário um difeomorfismo de V^t, podemos assumir que $\|f(x)\| < 1$ para todo $x \in M$. Assim:

$$\|\overline{g}\,(x) - g(x)\| = \|A(f(x))\| \leq \|A\| \, \|f(x)\| < \|A\| < \varepsilon' \ , \ \forall\ x \in M.$$

Isto quer dizer que a aproximação é uniforme.

Vamos fazer de $\overline{g}$ uma C^k- aproximação de g sobre qualquer compacto $C \subset M$. Então dado um compacto em M e $\varepsilon'>o$, encontraremos $\overline{g}$ tal que $N_k\ (\overline{g}-g)\ (x) < \varepsilon'$, $\forall x \in C$. Para isso basta substituirmos $f(x)$ por $\delta f(x)$, onde $\delta = \dfrac{\varepsilon'}{\sup\limits_{x \in C} N_k\ (f(x))}$

$$\text{Agora, } \|\overline{g}(x) - g(x)\| = \left\| A \frac{\varepsilon'}{\sup\limits_{x \in C} N_k\ (f(x))} f(x) \right\| = \frac{\varepsilon'}{\sup\limits_{x \in C} N_k\ (f(x)} \|Af(x)\|$$

$$N_k\ (\overline{g}-g)(x) = \frac{\varepsilon'}{\sup\limits_{x \in C} N_k(f(x))} . N_k(A(f(x))$$

$$N_k(A\ f(x)) = \|A\ f(x)\| + \|A\ df(x)\| + \|A\ d^2f(x)\| + \ldots . \leq \|A\| \, N_k(f(x))$$

$$\text{Logo} \quad N_k(\overline{g}-g)\ (x) \leq \frac{\varepsilon'}{\sup\limits_{x \in C} N_k(f(x))} \|A\| N_k\ (f(x)) \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon' \|A\|}{\sup\limits_{x \in C} N_k(f(x))} . \sup_{x \in C} N_k\ (f(x)) < \varepsilon'.\varepsilon' \ .$$

Proposição 2.3.2 : Se M admite uma imersão injetora, f, em V^t, então qualquer aplicação $g : M \longrightarrow V^{2n+1}$ pode ser C^k- aproximada por uma imersão injetora. A aproximação é também uniforme.

Demonstração :

Sejam i_1, i_2 (inclusões de V^t e V^{2n+1} em $V^t x V^{2n+1}$) e P_o (projeção interna no segundo fator) como na proposição anterior. Consideremos, analogamente, $fxg: M \longrightarrow V^t \times V^{2n+1}$, que já sabemos é uma imersão equivariante. Como f é injetora, então fxg será uma imersão injetora de M em $V^t \times V^{2n+1}$.

Aplicando a proposição 2.2.2, encontraremos P de $V^t \times V^{2n+1}$ em $V^t \times V^{2n+1}$ tal que $P.(fxg)$ é uma imersão injetora e $||P-P_o|| < \varepsilon$ para um $\varepsilon > 0$ dado.

Como foi feito na proposição anterior (e os argumentos são os mesmos) iremos obter a aplicação $\overline{g}(x) = (P.i_2)^{-1}. P.(f(x),g(x))$. Já sabemos que $\overline{g}$ é uma imersão equivariante. É também injetora pois $P.(fxg)$ e $(P.i_2)^{-1}$ o são. Como já foi demonstrado na proposição anterior $\overline{g}$ é uma C^k- aproximação de g e esta aproximação é uniforme.

Observação : Se nas proposições acima $f(x) \neq 0$ e $g(x) \neq 0$ para todo $x \in M$, teremos também que $\overline{g}(x) \neq 0$ para todo $x \in M$, pois pela observação feita na secção 2, escolhemos P tal que $P.(f(x), g(x)) \neq 0$ e como $(P.i_2)^{-1}$ é isomorfismo, então $\overline{g}(x) = (P.i_2)^{-1}P.(f(x),g(x)) \neq 0$, para todo $x \in M$.

4. Mergulhos Próprios

Definição 2.4.1 : Uma aplicação $f : M \longrightarrow N$, entre variedades, é uma aplicação própria quando é contínua e para cada compacto $K \subset N$, $f^{-1}(K) \subset M$ é compacto.

<u>Proposição 2.4.2</u> : Toda aplicação própria é fechada.

<u>Demonstração</u> :

Seja $F \subset M$, F fechado. Seja $y \in \overline{f(F)}$. Existe uma sequência (y_n) tal que $y_n \longrightarrow y$. O conjunto $C = \{y, y_1, \ldots, y_n, \ldots\}$ é compacto. Logo $f^{-1}(C)$ é compacto em M.

Seja (x_n) tal que $f(x_n) = y_n$. Então (x_n) é uma sequência contida em $f^{-1}(C)$, que é compacto, o que implica que existe uma subsequência $(x_{n_k}) \longrightarrow x \in F$, pois F é fechado. Mas $f(x_{n_k}) \longrightarrow f(x)$ e $f(x_{n_k}) = y_{n_k} \longrightarrow y$, então $y = f(x)$. Logo $y \in f(F)$ e portanto $f(F)$ é fechado.

Com esta proposição podemos concluir que uma imersão injetora própria $f : M \longrightarrow N$ é um mergulho e, além disso, $f(M)$ é um subconjunto fechado de N.

<u>Proposição 2.4.3</u> : Se M admite uma imersão injetora em V^t então M pode ser mergulhada como subconjunto fechado de V^{2n+1}.

Para demonstrarmos esta proposição, provaremos inicialmente dois lemas :

<u>Lema 1</u> : Seja $f : M \longrightarrow R^m$ contínua. Se $f^{-1}(B_n)$ é compacto para qualquer n, então f é própria, onde $B_n = \{ x \in R^m \mid \|x\| \leq n\}$.

<u>Demonstração</u> : Seja $K \subset R^m$, K compacto em R^m. Logo existe n tal que $\|x\| \leq n$, $\forall\, x \in K$. Assim $f^{-1}(K) \subset f^{-1}(B_n)$. K fechado e f contínua implicam $f^{-1}(K)$ fechado em M. Como $f^{-1}(B_n)$ é compacto temos que $f^{-1}(K)$ é compacto.

<u>Lema 2</u> : Se $f : M \longrightarrow R^n$ é própria e $g : M \longrightarrow R^n$ é uma aproximação uniforme de f, então g também é própria.

Demonstração :

Seja $K \subset R^n$, K compacto. Como g é uma aproximação uniforme de f, existe $\varepsilon > 0$ tal que $||f(x) - g(x)|| < \varepsilon$, para todo $x \in M$. Seja U vizinhança de K tal que diam U = diam K + δ onde $\delta > \varepsilon$ $(d(K, U^c) = \delta)$. Seja $A = f^{-1}(U)$, então $f^{-1}(K) \subset A$.
Se $g(x) \in K$, então $f(x) \in U$ e portanto $x \in A$. Logo $g^{-1}(K) \subset A$.

Consideremos $\overline{U}$, o fecho de U. $\overline{U}$ é compacto (fechado e limitado em R^m). Então:

$f^{-1}(\overline{U})$ é compacto pois f é própria (1)

$g^{-1}(K)$ é fechado pois K é fechado (2)

$g^{-1}(K) \subset A \subset f^{-1}(\overline{U})$ (3)

(1), (2) e (3) implicam $g^{-1}(K)$ compacto.

Demonstração da Proposição 2.4.3 :

Se obtivermos uma aplicação $g : M \longrightarrow V^{2n+1}$ tal que g seja própria, pela proposição 2.3.2, existirá uma C^k-aproximação uniforme de g que será uma imersão injetora. Pelo lema 2, esta imersão será também própria. A proposição 2.4.2 conclui a demonstração.

Resta então, obtermos $g : M \longrightarrow V^{2n+1}$ própria e equivariante.

Como M é paracompacta, seja a partição da unidade $\overline{\Psi}_i$ de suporte compacto associada a um recobrimento aberto localmente finito.

Seja $\psi_i (x) = \int_G \overline{\Psi}_i (gx) dg$.

Conforme demonstrado na proposição 1.3.3, ψ_i é invariante sob G, para qualquer i. ψ_i como definida acima é uma partição da unidade pois satisfaz as condições que provaremos abaixo:

a) $\psi_i(x) \geq 0$, $\forall$ x (Condição 4 da definição 1.3.1)

b) Se $\psi_i(x) = 0$, teremos $\bar{\psi}_i(gx) = 0$ para todo g em G (Condição 6 da definição 1.3.1).

Se $\bar{\psi}_i\ (gx) \neq 0$ para algum $g \in G$, teremos $\psi_i(x) \neq 0$ (também pela condição 6).

Logo $\psi_i(x) \neq 0 \iff \bar{\psi}_i(gx) \neq 0$ para algum $g \in G$.

Seja U_i o suporte de $\bar{\psi}_i$. Afirmamos:

$$\text{Suporte } \psi_i = \bigcup_{g \in G} g^{-1}\, U_i \quad .$$

De fato : Sejam $A_i = \{x \in M \ / \ \psi_i(x) \neq 0\}$ e $B_i = \{x \in M \ / \ \bar{\psi}_i(x) \neq 0\}$.

Se $x \in A_i$, existe $g \in G$ tal que $\bar{\psi}_i(gx) \neq 0$, ou seja, $gx \in B_i$, e portanto $x \in \bigcup_{g \in G} g^{-1}B_i$. Reciprocamente $\exists$ $g \in G$ tal que $x \in g^{-1}B_i$, ou seja $gx \in B_i$, e então $\psi_i(x) \neq 0$. Logo $A_i = \bigcup_{g \in G} g^{-1}B_i$.

$\overline{g^{-1}B_i} = g^{-1}\ \overline{B_i}$, pois $\bar{g}$ é um homeomorfismo.

$$\text{Suporte } \psi_i = \overline{A_i} = \overline{\bigcup_{g \in G} g^{-1}B_i} = \bigcup_{g \in G} \overline{g^{-1}B_i} = \bigcup_{g \in G} g^{-1}\overline{B}_i = \bigcup_{g \in G} g^{-1}\ U_i \ .$$

Afirmamos que suporte ψ_i é compacto. Se (y_n) é uma sequência no suporte ψ_i, y_n é dado por: $y_n = g_n^{-1}\ x_n$, com $x_n \in U_i$. (x_n) é uma sequência em U_i, que é compacto, logo existe (x_{n_k})convergindo para $x \in U_i$. $(g^{-1}{}_{n_k})$ é uma sequência em G, que é compacto, logo existe $(g^{-1}{}_{n_{k_i}})$ convergindo para $g \in G$. Assim a subsequência (y_n) formada pelos $y_{n_{k_i}} = g^{-1}_{n_{k_i}}\ x_{n_{k_i}}$ converge para $gx \in$ suporte ψ_i, pois a ação de G é uma função contínua. Isto prova nossa asserção.

Cada $U_i \subset V_i$, onde $\{V_i\}$ é um recobrimento aberto localmente finito de M. Então seja:

$$W_i = \bigcup_{g \in G} g^{-1} V_i.$$

W_i é invariante sob G, pois se $x \in W_i$, então $x = g^{-1}y$ com $y \in V_i$. Então para $h \in G$, $hx = h\, g^{-1}y = g'y = z^{-1}y \in W_i$, com $z \in G$.

Como a ação de G é uma função contínua, $g^{-1}V_i$ é um aberto e assim W_i é um aberto. $V_i \subset W_i$ o que implica $M = \bigcup_i V_i = \bigcup_i W_i$.

O recobrimento aberto $\{W_i\}$ é localmente finito, pois dado $x \in M$ e A um aberto contendo x, existem finitos $V_i (V_1, \ldots, V_n$ por exemplo) tal que $A \cap V_i \neq \emptyset$. $A \cap W_i \neq \emptyset$ se, e somente se, $g^{-1} A \cap W_i \neq \emptyset$, $\forall\, g \in G$. Se:

$$h^{-1} A \cap W_i = h^{-1} A \cap \Big(\bigcup_{g \in G} g^{-1} V_i \Big) = \bigcup_{g \in G} (h^{-1} A \cap g^{-1} V_i) \neq \emptyset$$

então existe $g \in G$, tal que $h^{-1}A \cap g^{-1} V_i \neq \emptyset$, $\forall h \in G$. Tomo $h=g$, então $x \in g^{-1}A \cap g^{-1}V_i$ acarreta $gx \in A \cap V_i$. Reciprocamente, se $x \in A \cap V_i$, $h^{-1}x \in h^{-1} A \cap h^{-1}V_i$, ou seja:

$$\bigcup_{g \in G} (h^{-1}A\ g^{-1}V_i) = h^{-1}A \cap \Big(\bigcup_{g \in G} g^{-1}V_i \Big) = h^{-1}A \cap W_i \neq \emptyset,\ \forall h \in G.$$

Logo $A \cap W_i \neq \emptyset$ se e somente se $A \cap V_i \neq \emptyset$. Isto prova que W_i é localmente finito.

Suporte $\psi_i \subset W_i$, para todo i.

c) $\sum_i \psi_i(x) = \sum_i \int_G \overline{\psi}_i(gx)\, d_g$.

Como a família de funções ψ_i está associada a um recobrimento localmente finito, estamos na realidade, realizando uma soma finita. Então pela condição (2) da definição 1.3.1:

$$\sum_i \int_G \overline{\psi}_i(gx)\, dg = \int_G \Big(\sum_i \overline{\psi}_i(gx)\Big)\, dg = \int_G dg = 1.$$

Logo temos ψ_i uma partição da unidade invariante.

Temos que M admite uma imersão injetora em V^{2n+1}. Seja $f : M \longrightarrow V^{2n+1}$ está imersao. Se $f(y) = 0$, y é o único ponto em que tal acontece. Então seja $\psi_1, \ldots, \psi_r$ as funções tais que $y \in$ suporte ψ_i. Seja $m_i = \inf\limits_{\psi_i(x)>0} \|f(x)\|$, $i>r$. $m_i \neq 0$ para $i > r$.

Então definimos $g : M \longrightarrow V^{2n+1}$ tal que:

$$g(x) = \sum_{i=r+1}^{\infty} \frac{i\, \psi_i(x) f(x)}{m_i}$$

Seja x tal que $||g(x)|| \leq n$. Se $x \notin \bigcup\limits_{i=1}^{n}$ suporte ψ_i, então

$\psi_i(x) = \ldots = \psi_n(x) = 0$. Assim :

$$|| g(x)|| = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{i\, \psi_i(x)}{m_i} ||f(x)|| \geq \sum_{i=n+1}^{\infty} i\, \psi_i(x),$$

pois $\frac{||f(x)||}{m_i} \geq 1$ quando $i > r$. Portanto se

$$n \geq || g(x)|| \geq \sum_{i=n+1}^{\infty} i\, \psi_i(x) \geq (n+1) \sum_{i=n+1}^{\infty} \psi_i(x) = n+1,$$

ou seja $n \geq n+1$, que é absurdo. Logo $x \in \bigcup_{i=1}^{n}$ suporte ψ_i.

Então: $g^{-1}(B_n) \subset \bigcup_{i=1}^{n}$ suporte ψ_i.

$g^{-1}(B_n)$ é fechado (g é contínua) e $\bigcup_{i=1}^{n}$ suporte ψ_i é compacto. Logo $g^{-1}(Bn)$ é compacto e pelo Lema 1 g é própria.

Para terminarmos a demonstração mostraremos que g é equivariante:

$$g(hx) = \sum_{i=r+1}^{\infty} \frac{i\ \psi_i(hx)\ f(hx)}{m_i} = \sum_{i=r+1}^{\infty} \frac{i\ \psi_i(x)\ \bar{h}\ (f(x))}{m_i}$$

$$\bar{h}\ (g(x)) = \bar{h}\Big(\sum_{i=r+1}^{\infty} \frac{i\ \psi_i(x)\ f(x)}{m_i} \Big) = \sum_{i=r+1}^{\infty} \frac{i\ \psi_i(x)\ \bar{h}(f(x))}{m_i}$$

pois V^{2n+1} é uma representação de G e então a ação de G é linear.

<u>Observação</u> : Novamente podemos verificar que se $f(x) \neq 0$ para todo $x \in M$ então $g(x) = 0$ se, e somente se, $\psi_i(x) = 0$ para todo i o que não acontece pois ψ_i é uma partição da unidade.

Logo, também $g(x) \neq 0$ para todo x em M.

CAPÍTULO III

MERGULHOS DE G-VARIEDADES SUBORDINADAS

1. Órbitas e Núcleos em G-espaços

Definição 3.1.1 : Se X é um G-espaço e $x \in X$ então o subespaço $G(x) = \{gx \in X \;/\; g \in G\}$ é chamado órbita de X(por G).

Proposição 3.1.2 : Para todo x e y em X, temos que $G(x) = G(y)$ ou $G(x) \cap G(y) = \emptyset$.

Demonstração :

Se $G(x) \cap G(y) \neq \emptyset$, então $gx = hy$ para $g, h \in G$ e $x, y \in X$. Então para qualquer $g' \in G$ temos:

$$g'x = (g'g^{-1}g)x = (g'g^{-1})(gx) = (g'g^{-1})(hy) = (g'g^{-1}h)y \in G(y)$$

Isto, quer dizer que $G(x) \subset G(y)$. Analogamente, mostra-se que $G(y) \subset G(x)$.

Consideremos o conjunto $X/G = \{x^* = G(x) \;/\; x \in X\}$. Se definirmos $\pi: G \longrightarrow X/G$ tal que $\pi(x) = x^*$, π está bem definida e é sobre. X/G se torna um espaço topológico com a topologia quociente. Com esta topologia X/G é chamado espaço das órbitas.

Definição 3.1.3 : Se X é um G-espaço, a ação de G é dita transitiva se existe somente uma órbita em X.

Seja x um ponto qualquer de um G-espaço X e G_x o subgrupo de isotropia de x. Afirmamos que existe uma aplicação natural de G/G_x em $G(x)$. De fato, definimos:

$$\alpha_x : G/G_x \longrightarrow G(x)$$

$$gG_x \longrightarrow gx$$

α_x está bem definida, pois se $gG_x = g'G_x$, então $g^{-1}g' \in G_x$. Logo $g^{-1}g'x = x$ ou seja $g'x = gx$. Consideremos a aplicação $\beta_x : G \longrightarrow G/G_x$ tal que $\beta_x(g) = g\,G_x$. G/G_x, tem a topologia quociente e β_x é portanto contínua. Mas $\alpha_x \cdot \beta_x = \psi_x$, com $\psi_x(g) = \psi(g,x) = gx$, ação de G em $G(x)$. Logo ψ_x é contínua, o que implica α_x é contínua.

<u>Proposição 3.1.4</u>: Se G é compacto, então α_x de G/G_x em $G(x)$ é um homeomorfismo.

<u>Demonstração</u> :

Como G é compacto então G/G_x também é compacto. Como $G(x)$ é um espaço topológico Hausdorff e α_x é contínua, falta apenas provarmos que α_x é bijetora.

Se $gx = hx$ então $h^{-1}gx = x$ o que quer dizer que $h^{-1}g \in G_x$. Logo $gx = hx$ se, e somente se, $h \equiv g \bmod G_x$, o que equivale a dizer que $gx = hx$ se, e somente se, $gG_x = hG_x$.

Agora, dado $y \in G(x)$ existe $g \in G$ tal que $gx = y$, logo $\alpha_x(gG_x) = gx = y$.

Se pensarmos G agindo em G/G_x de maneira que $g(hG_x) = (gh)G_x$, então o homeomorfismo acima se torna equivariante.

<u>Proposição 3.1.5</u> : Seja G um grupo de Lie e H um subgrupo fechado de G. Então G/H é uma variedade diferencial, verificando as três propriedades seguintes:

1) A projeção π: $G \longrightarrow G/H$ é diferenciável;

2) A aplicação de $G \times G/H$ em G/H, que a (g', gH) faz corresponder $g'gH$, é diferenciável;

3) Para todo $\overline{g} \in G/H$ existe uma vizinhança $W_{\overline{g}}$ de $\overline{g}$ e uma aplicação diferenciável $\sigma_{\overline{g}}$ de $W_{\overline{g}}$ em G tal que $\pi.\sigma_{\overline{g}}(\overline{g}') = \forall\ \overline{g}' \in W_{\overline{g}}$.

<u>Demonstração</u> :

Ver Matsushima [15], pg. 57

Agora, se nosso G-espaço for uma G-variedade e G um grupo de Lie compacto, então podemos afirmar:

<u>Proposição 3.1.6</u> : A aplicação $\alpha_x : G/_{G_x} \longrightarrow G(x)$ é um mergulho diferenciável.

<u>Demonstração</u> :

Considero as aplicações:

$$\begin{array}{ccccc} W_{G_x} & \xrightarrow{\sigma_{G_x}} & G & \xrightarrow{\phi} & G(x) \\ (gG_x) & \longrightarrow & g & \longrightarrow & gx \end{array}$$

onde W_{G_x} e σ_{G_x} são como na propriedade (3) da proposição acima. Como $\alpha_x\big|_{W_{G_x}} = \phi.\sigma_{G_x}$, temos que α_x é diferenciável numa vizinhança de G_x.

Pela homogeineidade de G/G_x, é suficiente mostrar que α_x, é diferenciável numa vizinhança de G_x e que $d\alpha_x$ é injetora em G_x.

Para mostrar a injetividade de $d\alpha_x$, observamos primeiramente que a imagem do espaço tangente em G_x por $d\sigma_{G_x}$ é o complemento linear do espaço tangente a G_x em T_e G. Assim será suficiente mostrar que o espaço nulo de $d\phi$ em e é o espaço tangente a G_x.

Então, seja Z um vetor tangente a G em e, e consideremos ExptZ um grupo de transformações a um parâmetro de G. Para cada $y \in G(x)$, $t \longmapsto (\text{ExptZ})y$ é uma curva diferenciável em G(x), com vetor tangente Z^*y em $t = 0$. Da relação $(\text{Exp}(t_1 + t_2)\, Z)y = (\text{Expt}_1 Z)(\text{Expt}_2 Z)y$ segue que $t \longmapsto (\text{ExptZ})y$ é uma curva integral de Z^*, começando de y. Pela unicidade do teorema de equações diferenciais ordinárias, temos que $(\text{ExptZ})y \equiv y$ se, e somente se, $Z^*y = 0$. Agora, $\phi(\text{ExptZ}) = (\text{ExptZ})x$, e portanto $Z^*y = d\phi(Z)$. Assim $d\phi(Z) = 0$ se, e somente se, $(\text{ExptZ})\, x \equiv x$, ou seja, ExptZ é um subgrupo a um parâmetro de G_x o que implica que Z é tangente a G_x.

<u>Proposição 3.1.7</u> : Se x e y pertencem a G(x) então G_x é conjugado de G_y.

<u>Demonstração</u> :

Se x e y pertencem a G(x), então existe $g \in G$, tal que $x = gy$.

Afirmamos que $G_x = G_{gy} = gG_y g^{-1}$. De fato, seja $h \in G_x$, então $hgy = gy$. Assim $g^{-1}hgy = g^{-1}gy$, ou seja, $g^{-1}hgy = y$. Logo $g^{-1}hg \in G_y$ o que quer dizer $h \in gG_y g^{-1}$. Reciprocamente, se $h \in gG_y g^{-1}$, então $g^{-1}hg \in G_y$. Logo $g^{-1}hgy = y$, ou seja, $hgy = gy$ isto é $hx = x$.

<u>Definição 3.1.8</u> : Se H é subgrupo de G, denotaremos por (H) a coleção de subgrupos de G que são conjugados de H em G. Isto é:

$(H) = \{gHg^{-1} / g \in G\}$. (H) é chamado <u>tipo de G-órbita</u>.

Se X é um G-espaço e Ω uma órbita em X, $\Omega = G(x)$ e então $G_{gx} = gG_x g^{-1}$ (proposição anterior), segue-se que $\{G_w \ / \ w \in \Omega\} = (G_x)$ é um tipo de G-órbita, que chamaremos <u>tipo de G-órbita</u> de Ω e denotaremos por $[\Omega]$.

<u>Proposição 3.1.9</u> : Se X e Y são G-espaços e $f: X \longrightarrow Y$ é uma aplicação equivariante injetora, então $[\Omega] = [f(\Omega)]$ para Ω, uma órbita em X.

<u>Demonstração</u> :

Primeiramente, observamos que $f(\Omega)$ é uma órbita, pois $f(\Omega) = \{f(gx) \ / \ g \in G\}$ para $x \in \Omega$. Mas f é equivariante e então $f(\Omega) = \{g f(x) \ / g \in G\} = G(f(x))$.

Temos $G_x = \{g \in G \ / \ gx = x\}$ e $G_{f(x)} = \{g \in G / \ gf(x) = f(x)\}$.

Se $g \in G_x$ então $f(x) = f(gx) = gf(x)$. Logo $G_x \subset G_{f(x)}$. Reciprocamente, se $g \in G_{f(x)}$, então $gf(x) = f(x)$, e como f é equivariante $f(gx) = f(x)$, e portanto $gx = x$, pois f é injetora. Logo $G_x = G_{f(x)}$.

Segue-se que $(G_x) = [\Omega] = [f(\Omega)]$.

Sendo assim podemos considerar a categoria dos G-espaços transitivos cujos morfismos são aplicações equivariantes. Se dividirmos esta categoria em classes de equivalência, obteremos a <u>categoria dos tipos de G-órbitas</u>. Esta é uma categoria de classes de equivalência de G-espaços transitivos (órbitas).

Então se Ω é uma órbita, $[\Omega]$ denota sua classe de equivalência na categoria dos G-espaços transitivos sob um homeomorfismo equivariante. Como existe um homeomorfismo equivariante de toda G-órbita com um espaço homogêneo de G, então G/G_x pode representar $[G(x)]$.

Teorema 3.1.10: Se M é uma G-variedade, então para cada $x \in M$ existe uma vizinhança U de x, tal que em U existe um número finito de tipos de órbitas.

Demonstração:

Ver Palais [13] pg. 38.

Corolário 3.1.11: Se V é um G-espaço euclidiano, então V tem um número finito de tipos de órbitas.

Demonstração:

Ver Palais [13] pg. 39.

Definição 3.1.12: Seja H um subgrupo fechado de G e S um subconjunto de um G-espaço X. S será um H-núcleo se:

i) S é fechado em $GS = \{gs/g \in G \text{ e } s \in S\}$;

ii) S é H invariante, isto é, $HS = S$;

iii) Para cada $g \in G-H$, $gS \cap S = \emptyset$.

Um H-núcleo S em X será uma H-fatia em X se GS é aberto em X. Se $x \in X$, então uma fatia em x é uma G_x-fatia que contém x.

Proposição 3.1.13: Sejam X e Y dois G-espaços e $f:X \to Y$ uma aplicação equivariante. Se S é um H-núcleo (H-fatia) em Y, então $f^{-1}(S)$ é um H-núcleo (respectivamente, H-fatia) em X.

Demonstração:

Ver Palais [13] pg. 30.

Seja Σ uma subvariedade de M e $T_p\Sigma$ o espaço tangente a Σ em p. Consideremos $(T_p\Sigma)^\perp$ o complemento ortogonal de $T_p\Sigma$ em T_pM. Então $N(\Sigma) = \bigcup_{p \in \Sigma} (T_p\Sigma)^\perp$ é chamado o <u>fibrado normal</u> de Σ em M.

Como $T(M) = T(\Sigma) \oplus N(\Sigma)$ e $T(M) \simeq T(\Sigma) \oplus T(M)/_{T(\Sigma)}$, temos que: $N(\Sigma) \simeq T(M)/_{T(\Sigma)}$.

<u>Teorema 3.1.14</u>: (Koszul [9], pg. 138). Sejam M uma G-variedade e Σ uma subvariedade compacta de M. Então existe uma vizinhança aberta invariante 0 de Σ e uma retração f de 0 sobre Σ, tal que $f^{-1}(x)$ é uma bola aberta centrada em x, para $x \in \Sigma$.

<u>Demonstração</u>:

Seja $N(\Sigma)$ o fibrado normal de Σ. Consideremos $N(\Sigma,\varepsilon) = \{v \in N(\Sigma) \ / \ ||v|| < \varepsilon\}$. Seja E a restrição da aplicação exponencial a $N(\Sigma,\varepsilon)$. Como sabemos, se ε é suficientemente pequeno E é um difeomorfismo de $N(\Sigma,\varepsilon)$ sobre $S(\Sigma,\varepsilon) = \{p \in M \ / \ d(p,\Sigma) < \varepsilon\}$, onde d é a métrica riemanniana.

Denotemos por $d\overline{g}$ a ação de G em T(M) como no capítulo 1. Restringimos a ação a $N(\Sigma,\varepsilon)$ e teremos $N(\Sigma,\varepsilon)$ uma G-variedade.

Como as ações de G em M e TM são isometrias ($T(M) \to M$ é um G-fibrado riemanniano) então $E \cdot d\overline{g} = \overline{g} \cdot E$.

Assim E é um difeomorfismo equivariante, e $S(\Sigma,\varepsilon)$ é a vizinhança invariante de Σ.

0 é a vizinhança $S(\Sigma,\varepsilon)$. Então a projeção na fibra de $N(\Sigma,\varepsilon)$ sobre a secção nula, levada por E sobre 0, dá a retração equivariante desejada de 0 sobre Σ.

<u>Proposição 3.1.15</u>: Se M é uma G-variedade e $x \in M$, então existe uma fatia S em x, tal que S é uma bola aberta invariante centrada

em x.

Demonstração:

No teorema anterior tomamos $\Sigma = G(x)$ e pomos $f^{-1}(x) = S$. Claramente x é um G_x-núcleo, e como f é equivariante, segue de 3.1.13 que S é um G_x-núcleo e como 0 é aberto em M, temos que S é uma fatia em x.

Teorema 3.1.16: Sejam S e S' H-núcleos nos G-espaços X e Y, respectivamente, e seja f uma aplicação H-equivariante de S em S'. Então existe uma única aplicação G-equivariante $\bar{f} : GS \to GS'$, tal que $\bar{f}|_S = f$ e $\bar{f}(gs) = gf(s)$, para todo $g \in G$ e $s \in S$. Se f é injetora, $\bar{f}$ também será. Se f é um mergulho, então $\bar{f}$ é um mergulho de GS em GS'.

Demonstração:

Ver Palais [13], pg. 31.

2. Subordinação de G-Variedades

Conhecemos o teorema de Whitney para variedades: "Toda variedade de dimensão n pode ser mergulhada no espaço euclidiano $\mathbb{R}^{2n+1}$".

O objetivo deste trabalho é provar um teorema análogo ao de Whitney para G-variedades. Temos V, espaço vetorial real, que é representação de G, grupo de Lie compacto, e M G-variedade de dimensão n. Provaremos que M é mergulhada em V^{2n+1} e esse mergulho é uma aplicação equivariante.

No capítulo II, falamos de imersões equivariantes, de aproximação por imersões equivariantes e finalmente de mergulhos de

G-variedades em G-espaços euclidianos, ou seja, representações de G. Mas em todas as proposições do capítulo II, assumíamos inicialmente, a existência de uma imersão equivariante de M em V^t, para algum t, e para provarmos o mergulho de M^n em V^{2n+1}, assumíamos a existência de uma imersão injetora de M em V^t, para algum t. Então para generalizarmos o teorema de Whitney deveremos provar a existencia de uma imersão injetora equivariante de M em V^t para algum t.

Isso será mostrado para as G-variedades que satisfazerem a condição de subordinação que é a seguinte:

Definição 3.2.1: Se V é uma representação ortogonal de G, dizemos que uma G-variedade M está subordinada a V se para cada $x \in M$ existe uma vizinhança invariante U de x e um mergulho equivariante de U em $V^t - \{0\}$, para algum t.

Teorema 3.2.2: Teorema de Mostow-Palais: Seja G um grupo de Lie compacto e M uma G-variedade. Se U é qualquer aberto invariante de M, então existe uma aplicação diferenciável equivariante f de M em V^t (sendo V alguma representação de G) para algum t e tal que $f|_U$ é mergulho de U em V^t.

Demonstração:

Ver Mostow [5] e Palais [12] (caso em que U é relativamente compacto).

O teorema de Mostow-Palais permite concluir que toda G-variedade está subordinada a alguma representação ortogonal V de G. Assim, se trabalharmos somente com G-variedades subordinadas a uma representação V e conseguirmos mergulhá-las em $V^{2\dim M+1}$, atingiremos nosso objetivo. Consideremos então, a categoria cujos objetos são G-variedades subordinadas a V e cujos morfismos são aplicações equivariantes. Representaremos esta categoria por $\mathcal{G}(V)$.

3. A categoria das G-variedades subordinadas

Como fizemos na secção 1 com a categoria dos G-espaços cujos morfismos são aplicações equivariantes, consideremos em $\mathcal{G}(V)$ a subcategoria plena das G-variedades transitivas que chamaremos também Categoria das G-órbitas. Então toda G-variedade transitiva (órbita) é homeomorfa a um espaço homogêneo G/H.

Considerando as classes de equivalência dadas pela relação "homeomorfismo equivariante" da categoria das G-órbitas iremos obter os tipos de órbita em $\mathcal{G}(V)$.

Proposição 3.3.1: Existe um número finito de tipos de órbita em $\mathcal{G}(V)$.

Demonstração:

Seja Ω uma órbita em $\mathcal{G}(V)$. Seja $x \in \Omega$. Como Ω está em $\mathcal{G}(V)$, existe uma vizinhança invariante U_x de x e um mergulho f_x dessa vizinhança U_x em $V^t - \{0\}$, para algum t.

Como G é um grupo compacto, seus espaços homogêneos são compactos. Logo Ω é compacta pois é homeomorfa a um espaço homogêneo de G. Usando partição da unidade, encontraremos uma imersão injetora equivariante de Ω em $V^{\ell} - \{0\}$, para algum ℓ. Logo Ω pode ser mergulhada em $V^{2n+1} - \{0\}$, onde $n = \dim \Omega$ (proposição 2.4.3).

Seja $x \in \Omega$. Então G/G_x pode ser mergulhada em $V^{2(\dim G/G_x)+1} - \{0\}$. Se Σ é outra órbita em $\mathcal{G}(V)$ e $y \in \Sigma$ então Σ será mergulhada em $V^{2(\dim G/G_y)+1} - \{0\}$. Logo toda órbita em $\mathcal{G}(V)$ é mergulhada em $V^{2\dim G+1} - \{0\}$.

Se Ω é um órbita em $\mathcal{G}(V)$ e f é o mergulho de Ω em $V^{2\dim G+1}$, então $[\Omega] = [f(\Omega)]$ (Proposição 3.1.9). Logo $\mathcal{G}(V)$ e $V^{2\dim G+1}$ têm o mesmo número de tipos de órbita. Então segue-se o resultado.

Proposição 3.3.2: M^n está em $\mathcal{G}(V)$ se e somente se:

i) Para cada $m \in M$, $G(m)$ é mergulhada em $V^{2\dim G+1} - \{0\}$.

ii) Existe um G_m-equivariante monomorfismo

$$T_m(M)/_{T_m(G(m))} \longrightarrow V^n$$

Demonstração:

Quanto à necessidade, vemos que (i) segue da proposição anterior, e (ii) é clara. Como $Tm(M)/_{Tm(G(m))} \simeq N(G(m))$ e $N(G(m),\varepsilon)$ é difeomorfa a $S(G(m),\varepsilon)$ que contém uma fatia em m (proposições 3.1.14 e 3.I.15), o teorema 3.1.16 prova a suficiência.

Corolário 3.3.3: M^n está em $\mathcal{G}(V)$ se, e somente se, M pode ser localmente mergulhada em $V^{n+2\dim G+1} - \{0\}$.

Demonstração:

Imediato da proposição anterior.

4. Teorema Generalizado de Whitney

Proposição 3.4.1: Se M está em $\mathcal{G}(V)$ então M pode ser mergulhada em V^t, para algum t.

Demonstração:

Pela última proposição da secção anterior, existe uma cobertura de M formada pelos interiores dos conjuntos compactos invariantes U_α tais que para cada U_α existe um mergulho $f_\alpha : U_\alpha \longrightarrow V^s - \{0\}$ onde $s = 2\dim G + \dim M + 1$.

Como M é paracompacta e tem dimensão n existe um refinamento enumerável de U_α por conjuntos compactos invariantes U_{ij}, $i = 0,1,\ldots n$ e $j \in Z^+$ tal que $U_{ij} \cap U_{ij} = \emptyset$ se $j \neq k$.

(Resultado demonstrado por Wolfgang Meyer em [14]).

$\{U_{ij}\}$ é um refinamento de $\{U_\alpha\}$; portanto para cada U_{ij} existe um α tal que $U_{ij} \subset U_\alpha$. Restringimos f_α a U_{ij} e obtemos o mergulho f_{ij} assim:

$$f_{ij} : U_{ij} \longrightarrow V^s - \{0\}.$$

Consideremos agora os intervalos da reta, do tipo $(j,j+1)$, para $j \in Z^+$. Sabemos que existe um difeomorfismo, que chamaremos r_j, de $\mathbb{R}^+$ sobre $(j,j+1)$.

Seja $\overline{f}_{ij}(x) = r_j(\|f_{ij}(x)\|) \dfrac{f_{ij}(x)}{\|f_{ij}(x)\|}$.

Como f_{ij} é equivariante e V é representação ortogonal então $\overline{f}_{ij}$ é equivariante. Cada $\overline{f}_{ij}$ ainda é um mergulho, pois r_j é um mergulho também. Notamos que se $j \neq k$ as imagens de f_{ij} e f_{ik} são disjuntas, pois:

$$j < \|f_{ij}(x)\| < j + 1, \ \forall x \in U_{ij}$$

$$k < \|f_{ik}(x)\| < k + 1, \ \forall x \in U_{ik}$$

Seja $f_i : U_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} U_{ij} \longrightarrow V^s - \{0\}$ tal que $f_i(x) = f_{ij}(x)$ para $x \in U_{ij}$.

Novamente f_i é equivariante. Além disso f_i é bijetora sobre sua imagem, pois em cada U_{ij} já sabemos que o é. Mas se $j \neq k$ as imagens de f_{ij} e f_{ik} são disjuntas. Então segue a injetividade.

Como diferenciabilidade e continuidade são propriedades locais e acontecem em cada U_{ij}, então podemos concluir que cada f_i é um mergulho. Seja,

$$\overline{f}_i(x) = \left(r_0(\|f_i(x)\|)\frac{f_i(x)}{\|f_i(x)\|}, \sqrt{1 - r_0(|f_i(x)|)^2}\ \frac{f_i(x)}{\|f_i(x)\|}\right),$$

onde r_0 é o difeomorfismo de $\mathbb{R}^+$ sobre $(0,1)$.

$$f_i(x) \in V^{2s}$$

$$f_i(x) = (f_i^1(x),\ldots,f_i^s(x)).$$

$$\|\overline{f}_i(x)\|^2 = \frac{r_0(\|f_i(x)\|)^2(f_i^1(x))^2}{\|f_i(x)\|^2} + \ldots + \frac{r_0(\|f_i(x)\|)^2(f_i^s(x))^2}{\|f_i(x)\|^2} +$$

$$+ \frac{1-r_0(\|f_i(x)\|)^2(f_i^1(x))^2}{\|f_i(x)\|^2} + \ldots + \frac{1-r_0(\|f_i(x)\|)^2(f_i^s(x))^2}{\|f_i(x)\|^2}$$

$$\|\overline{f}_i(x)\|^2 = \frac{r_0(\|f_i(x)\|)^2+1-r_0(\|f_i(x)\|)^2}{\|f_i(x)\|^2}\ ((f_i^1(x))^2+\ldots+(f_i^s(x))^2) =$$

$$= \frac{1}{\|f_i(x)\|^2}\ \|f_i(x)\|^2 = 1$$

Logo $\|\overline{f}_i(x)\| = 1$.

r_0 e a função $g(x) = \sqrt{x}$ são mergulhos. Assim $\overline{f}_i$ é um mergulho que mergulha cada U_i na esfera unitária de V^{2s}.

Como f_i é equivariante e V é representação ortogonal, temos que $\overline{f}_i$ é equivariante.

$\{U_i\}$ é um recobrimento de M. Como M é paracompacta existe um recobrimento aberto $\{V_i\}$ de M tal que $\overline{V}_i \subset U_i$.

U_i^c é fechado e é disjunto de $\overline{V}_i$. Assim, existe pelo Lema de Uryshon para variedades, $h_i \in C^\infty(M)$ tal que:

$$h_i(x) = \begin{cases} 1 \text{ para } x \in \overline{V}_i \\ 0 \text{ para } x \in U_i^c \end{cases}$$

Notemos que $\bigcup\limits_{i=1}^{n} h_i^{-1}(1) = M$.

Agora definimos $f : M \longrightarrow V^{2(n+1)s}$, pondo:

$f(x) = (h_0(x)\ \overline{f}_0(x),\ h_1(x)\ \overline{f}_1(x),\dots,h_n(x)\ \overline{f}_n(x))$.

Claramente f é diferenciável e equivariante, pois cada função coordenada satisfaz essas duas propriedades.

Afirmamos que f é uma imersão. Com efeito, seja $x \in M$. Existe i_o tal que $h_{i_o}(x) = 1$ e então $\Pi_{i_o} f(x) = \overline{f}_{i_o}(x)$. Assim:

$$d(\Pi_{i_o} \cdot f)_x = \Pi_{i_o} \cdot (df)_x = (d\overline{f}_{i_o})_x$$

Como as $\overline{f_i}$ são mergulhos, $d\overline{f}_{i_0}$ é injetora. Logo, para todo $x \in M$, existe alguma função coordenada que é imersão em x. Portanto f é uma imersão.

Se $f(x) = f(x)$ então $h_i(x)\ \overline{f}_i(x) = h_i(y)\ \overline{f}_i(y)$, para todo i. Mas existe i_o tal que $h_{i_o}(Y) = 1$. Então:

$$h_{i_o}(x)\ \overline{f}_{i_o}(x) = \overline{f}_{i_o}(y),$$

logo

$$||h_{i_0}(x)||\,\|\overline{f}_{i_0}(x)|| = \|\overline{f}_{i_0}(y)|| = 1.$$

Mas $||\overline{f}_{i_0}(x)|| = 1$, o que implica $h_{i_o}(x) = 1$. Logo $\overline{f}_{i_o}(x) = \overline{f}_{i_o}(Y)$ e então $x = y$, pois $\overline{f}_{i_0}$ é um mergulho.

Queremos que f seja um mergulho. Já sabemos que f é contínua.

Resta provarmos que f^{-1} é contínua.

Se $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ isto implica que $h_i(x_n)f_i(x_n)$ converge para $h_i(x)\,\overline{f}_i(x)$, para todo i. Mas existe i_o tal que $h_{i_o}(x) = 1$, com $x \in V_{i_o}$. Dado $\varepsilon > 0$, $\exists N$ tal que se $n \geq N$,

$$\|h_{i_o}(x_n)\,\overline{f}_{i_o}(x_n) - \overline{f}_{i_o}(x)\| < \varepsilon,$$

logo

$$\|h_{i_o}(x_n)\|\,\|\overline{f}_{i_o}(x_n)\| < \varepsilon + \|\overline{f}_{i_o}(x)\|,$$

ou seja

$$\|h_{i_o}(x_n)\| < \varepsilon + 1.$$

Portanto para $n \geq N$, $\|h_{i_o}(x_n) - h_i(x)\| < \varepsilon$, ou seja $h_i(x_n)$ converge para $h_{i_o}(x) = 1$. Como $h_{i_o}(y) = 0$ se $y \in U_{i_o}^c$, existe N tal que para $n \geq N$, $x_n \in U_{i_o}$ pois $x \in U_{i_o}$. Assim teremos $\overline{f}_{i_o}(x_n) \longrightarrow f_i(x)$ e como $\overline{f}_{i_o}$ é um mergulho temos $x_n \longrightarrow x$. Logo f^{-1} é contínua e f um mergulho.

<u>Teorema 3.4.2</u>: <u>Teorema Generalizado de Witney</u>: Se M^n está em $\mathcal{G}(V)$, então qualquer aplicação equivariante $f : M \longrightarrow V^t$ pode ser C^k-aproximada uniformemente por uma imersão equivariante se $t \geq 2n$ e por uma imersão equivariante injetora se $t \geq 2n + 1$. Além disso, se F é um subconjunto fechado de M e $f|_F$ é uma imersão (imersão injetora) então podemos escolher uma aproximação $\overline{f}$ tal que $\overline{f}|_F = f|_F$.

<u>Demonstração</u>:

Se M está em $\mathcal{G}(V)$ então pela proposição anterior M é mergulhada em V^{ℓ}, para algum ℓ.

Isto significa que M adimite uma imersão injetora em V^{ℓ}.

Portanto se $t \geq 2n + 1$, a proposição 2.3.2 garante a imersão equivariante injetora e se $t \geq 2n$ a proposição 2.3.1 garante a imersão equivariante.

Para demonstrarmos a segunda afirmação do teorema seja $g : M \longrightarrow V^{\ell}$ um mergulho com $\|g(x)\| = 1$, para todo x em M.

Se $x \in F$, $(df)_x$ é injetora. Logo existe uma vizinhança aberta U_x de x tal que $(df)_x$ é injetora para todo $x \in U_x$.

Seja $U = \bigcup_{x \in F} U_x$. U é vizinhança aberta de F e $f|_U$ é imersão. U^c é fechado e é disjunto de F. Assim, existe pelo Lema de Uryshon para variedades, $h \in C^{\infty}(M)$ tal que

$$h(x) = \begin{cases} 1 \text{ para } x \in F \\ 0 \text{ para } x \in U^c \end{cases}$$

Notemos que suporte $h \subset U$.

Agora, seja $\phi : M \longrightarrow V^t \times V^{\ell}$ tal que

$$\phi(x) = (f(x), (1-h(x))g(x)).$$

ϕ é uma imersão pois se $x \in$ suporte h, f é uma imersão e se $x \notin$ suporte h, então $h(x) = 0$ e então $\phi(x) = (f(x), g(x))$ e como g é um mergulho temos nossa afirmação.

Se f é injetora em F temos que ϕ é injetora em F pois para $x \in F$, $h(x) = 1$ e se $\phi(x) = \phi(y)$ implica $f(x) = f(y)$ e portanto $x = y$.

A aproximação da proposição 2.3.1 ou 2.3.2 satisfaz as propriedades desejadas.

BIBLIOGRAFIA:

1. A.G. WASSERMAN: "Equivariant Differential Topology", Topology, Vol. 8 (1969), 127-150.

2. C. CHEVALLEY: "Theory of Lie Groups I", Princeton University Press, 1946.

3. E.L. LIMA: "Variedades Diferenciáveis", Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 1973.

4. F.W. WARNER: "Foundations of Differential Manifolds and Lie Groups", Scott, Foresman and Co. Glenview, Illinois, 1971.

5. G.D. MOSTOW: "Equivariant imbeddings in Euclidean spaces",Ann. Math. 65 (1957), 432-446.

6. G.E. BREDON: "Introduction to Compact Transformations Groups", Academic Press, New York, 1972.

7. G. de RHAM: "Varietes Differentiables", Hermann, Paris, 1955.

8. J.F. ADAMS: "Lectures on Lie Groups", W.A. Benjamin Inc., Amsterdam, 1969.

9. J.L. KOSZUL: "Sur certain groupes de transformation de Lie", Colleque de Geometrie Differentiable, Strasbourg, 1953.

10. J.W. MILNOR: "Differential Topology", Lecture notes, Princeton University Press, 1958.

11. L. PONTRJAGIN: "Topological Groups", Princeton University Press, 1958.

12. R. PALAIS: "Imbedding of compact, differentiable transformations groups in orthogonal representations", J. Math. Mech. 6 (1957), 673-678.

13. R. PALAIS: "The classification of G-spaces", Mem. Am.Math.Soc. No. 36, 1960.

14. W. MEYER: "Kritische Mannigfaltig Keiten in Hilbertmannigfaltig Keiten", Thesis, Bonn, 1964.

15. Y. MATSUSHIMA: "Groupes de Lie", Université de Grenoble, 1966.